令和7年度 微積分及び演習I 小テスト No.1

数理・知能・電子・機械・応化・環境　課程 ＿＿＿ 回生　　学生番号 ＿＿＿＿＿＿＿＿　名前 ＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ A_α, B, U_λ を集合とする ($\alpha \in I$, $\lambda \in \Lambda$ は添え字, 及び添え字集合とする). このとき, **集合の等号, 包含関係の定義に従って**次を証明せよ.

(1)
$$B \cap \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \right) \subset \bigcup_{\alpha \in I} (B \cap A_\alpha)$$

(2)
$$\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \right)^c = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda^c$$

解答例　(1) ($\subset$) を示す. $x \in B \cap \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right)$ とする. 共通部分の定義より $x \in B$ かつ $x \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$. よって和集合の定義より, ${}^\exists \alpha_0 \in I$ s.t. $x \in A_{\alpha_0}$. ゆえに,

$$x \in B \cap A_{\alpha_0}.$$

再び和集合の定義より

$$x \in \bigcup_{\alpha \in I} (B \cup A_\alpha).$$

よって, ($\subset$) が成立. $\square$

(2) ($\subset$) を示す. $x \in \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda\right)^c$ とする. 補集合の定義から $x \notin \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$. つまり,

$${}^\forall \lambda \in \Lambda, \quad x \notin U_\lambda$$

(実際, もしそうでなければ, ${}^\exists \lambda_0 \in \Lambda$ s.t. $x \in U_{\lambda_0}$ となるが, このとき $x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ となり矛盾). ゆえに,

$$x \in U_\lambda^c$$

が得られるので, 共通部分の定義より

$$x \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda^c.$$

よって ($\subset$) が成立.

($\supset$) を示す. $x \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda^c$ とする. 共通部分の定義より

$${}^\forall \lambda \in I, \quad x \in U_\lambda^c,$$

すなわち

$$x \notin U_\lambda.$$

このとき,

$$x \notin \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$$

(実際, もしそうでなければ, ${}^\exists \lambda_0 \in \Lambda$ s.t. $x \in U_{\lambda_0}$ となるが矛盾). ゆえに補集合の定義から

$$x \in \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \right)^c.$$

よって ($\supset$) が成立.

以上により等号が成立. $\square$

$\boxed{2}$ $r \in \mathbb{R}$ とし, A_r, B_r をそれぞれ

$$A_r := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - r)^2 + (y - r)^2 \le 1\},$$

$$B_r := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1 + |r|\}.$$

このとき, 集合 $\bigcup_{r \in \mathbb{R}} A_r$ と $\bigcap_{r \in \mathbb{R}} B_r$ がどのような集合になるか図示せよ (図示するだけでよく証明は求めない).

$$\bigcup_{r \in \mathbb{R}} A_r \qquad\qquad \bigcap_{r \in \mathbb{R}} B_r$$

$\boxed{3}$ **集合の等号の定義に従って**次を証明せよ.

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(0, 1 + \frac{1}{n} \right) = (0, 1]$$

解答例　($\subset$) を示す. $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (0, 1 + 1/n)$ とする. 共通部分の定義より

$${}^\forall n \in \mathbb{N}, \quad x \in \left(0, 1 + \frac{1}{n} \right),$$

つまり, $0 < x < 1 + 1/n$. もし, $x > 1$ と仮定すると, このとき, $a := x - 1 > 0$ より

$$a = x - 1 < \frac{1}{n}, \quad n < \frac{1}{a}.$$

これは $1/a$ が $\mathbb{N}$ の上界であることを意味し, アルキメデスの原理に矛盾する. より $x \in (0, 1]$. ゆえに ($\subset$) が成立.

($\supset$) を示す. $x \in (0, 1]$ とする. すなわち, $0 < x \le 1$. このとき,

$${}^\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < x \le 1 < 1 + \frac{1}{n}.$$

共通部分の定義より

$$x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(0, 1 + \frac{1}{n} \right)$$

となり, ($\supset$) が成立する.

以上より等号成立. $\square$

$\boxed{4}$ $E \subset \mathbb{R}$ を空でない有界な集合とする．β を E の最大下界 $\inf E$ とおくと，その言葉の定義から β は次の 2 つの条件を満たすことを証明せよ:

$$\begin{cases} \text{(i)} \quad {}^\forall x \in E, \quad x \geq \beta; \\ \text{(ii)} \quad {}^\forall \varepsilon > 0, {}^\exists x_\varepsilon \in E \quad \text{s.t.} \quad \beta + \varepsilon > x_\varepsilon. \end{cases}$$

解答例　$\beta := \inf E$ とおく．このとき β は E の最大下界なので下界である．よって下界の定義から

$$^\forall x \in E, \quad x \geq \beta$$

を得る．よって (i) が成立する．次に (ii) を背理法で示す．(ii) を満たさないと仮定すると (ii) の否定: ${}^\exists\varepsilon_0 > 0$ s.t.

$$^\forall x \in E, \quad \beta + \varepsilon_0 \leq x$$

が成立する．よって，$\beta + \varepsilon_0$ も E の下界の 1 つであると分かる．しかし，

$$\beta + \varepsilon_0 > \beta$$

が成立するので，$\beta + \varepsilon_0$ は β より大きな E の下界となり，β の最大性に矛盾する．よって (ii) が成立する．

$\boxed{5}$ $A, B \subset \mathbb{R}$ を空でない有界な集合とする．次を証明せよ．

(1) $A \subset B$ ならば $\sup A \leq \sup B$.

(2) $E := \{x + y : x \in A, y \in B\}$ とおくと

$$\inf E \leq \inf A + \inf B.$$

(3) $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$.

(4) ${}^\forall a \in A, {}^\exists b_a \in B$ s.t. $a \leq b_a$ が成立するならば

$$\sup A \leq \sup B.$$

解答例　(1) $\beta = \sup B$ とおく．最小上界の定義より，

$$^\forall x \in B, \quad x \leq \beta.$$

ここで，$y \in A$ とする．仮定 $A \subset B$ より $y \in B$ なので，

$$y \leq \beta.$$

つまり，y の任意性より β は A の上界の 1 つである．一方，$\sup A$ は A の最小上界なので

$$\sup A \leq \beta = \sup B.$$

□

(2) $\alpha := \sup A$, $\beta := \sup B$ とおく．最大下界 (下限) の定義より，${}^\forall\varepsilon > 0$, ${}^\exists x_a \in A$, ${}^\exists x_b \in B$ s.t.

$$\alpha + \frac{\varepsilon}{2} > x_a, \quad \beta + \frac{\varepsilon}{2} > x_b.$$

ここで，E の定義より $x_a + x_b \in E$ なので $\inf$ の定義から

$$x_a + x_b \geq \inf E$$

ゆえに

$$\alpha + \beta + \varepsilon > x_a + x_b \geq \inf E,$$
$$\alpha + \beta + \varepsilon > \inf E.$$

$\varepsilon > 0$ の任意性より

$$\inf E \leq \alpha + \beta = \inf A + \inf B.$$

□

(3) ($\leq$) を示す．$A \subset A \cup B$ より，(1) を用いれば

$$\sup A \leq \sup(A \cup B).$$

同じく，$B \subset A \cup B$ より，

$$\sup B \leq \sup(A \cup B).$$

ゆえに

$$\sup(A \cup B) \leq \max\{\sup A, \sup B\}$$

を得る．

($\geq$) を示す．$\alpha := \sup A, \beta := \sup B$ とおく．sup の定義より，

$$^\forall x \in A, \quad x \leq \alpha \leq \max\{\alpha, \beta\} = \max\{\sup A, \sup B\},$$
$$^\forall y \in B, \quad y \leq \beta \leq \max\{\alpha, \beta\} = \max\{\sup A, \sup B\}.$$

よって，$z \in A \cup B$ とすると，和集合の定義より $z \in A$ または $z \in B$ である．

(i) $z \in A$ のとき，$z \leq \alpha \leq \max\{\sup A, \sup B\}$.

(ii) $z \in B$ のとき，$z \leq \beta \leq \max\{\sup A, \sup B\}$.

ゆえに，$\max\{\sup A, \sup B\}$ は $A \cup B$ の上界の 1 つである．$\sup(A \cup B)$ は $A \cup B$ の最小上界なので，

$$\sup(A \cup B) \leq \max\{\sup A, \sup B\}.$$

以上より等号が成立する．　□

(4) $\beta := \sup B$ とおくと，sup の定義より ${}^\forall b \in B$, $b \leq \beta$. $a \in A$ とする．仮定より ${}^\exists b_a \in B$ s.t.

$$a \leq b_a \leq \beta$$

よって β は A の上界の 1 つである．一方 $\sup A$ は A の最小上界なので

$$\sup A \leq \beta = \sup B$$

を得る．　□