令和7年度 微積分及び演習I 小テスト対策問題 No.2

数理・知能・電子・機械・応化・環境　課程 ______ 回生　　学生番号 ________________ 名前 ____________________

$\boxed{6}$ 次の命題の否定を作れ．ただし，問題中の集合 $E \subset \mathbb{R}$ や数列 $\{a_n\}$，値などについては宣言をしていないが適宜判断せよ．

(1) ${}^\forall r \in E,\ r < \alpha.$

(2) ${}^\exists k > 0$ s.t.

$$^\forall n \in \mathbb{N}, \quad |a_n| \le k.$$

(3) ${}^\forall \varepsilon > 0,\ {}^\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t.

$$^\forall n \ge N_\varepsilon, \quad |a_n - \alpha| < \varepsilon.$$

解答例　(1) ${}^\exists r_0 \in E$ s.t. $r_0 \ge \alpha$.
(2) ${}^\forall k > 0,\ {}^\exists n_k \in \mathbb{N}$ s.t.

$$|a_{n_k}| > k.$$

(3) ${}^\exists \varepsilon_0 > 0$ s.t. ${}^\forall N \in \mathbb{N},\ {}^\exists n_N \ge N$ s.t.

$$|a_{n_N} - \alpha| \ge \varepsilon_0.$$

$\boxed{7}$ 次の問いに答えよ．

(1) $r, s \in \mathbb{R}$ とする．

$$\big||r| - |s|\big| \le |r - s|$$

を証明せよ．

(2) $\{a_n\}$ を数列とする．このとき，$a_n \to \alpha\ (n \to \infty)$ ならば

$$|a_n| \to |\alpha| \quad (n \to \infty)$$

であることを ε-N 論法で証明せよ．

解答例　(1) まず $\big||r| - |s|\big|^2 \le |r - s|^2$ を示す．

$$\begin{aligned}
&|r - s|^2 - \big||r| - |s|\big|^2 \\
&= (r - s)^2 - (|r| - |s|)^2 \\
&= (r^2 - 2rs + s^2) - (|r|^2 - 2|r||s| + |s|^2) \\
&= 2|r||s| - 2rs \\
&\ge 2|r||s| - 2|r||s| = 0.
\end{aligned}$$

次に，$x \ge 0, y \ge 0$ で $x^2 \ge y^2$ ならば $x \ge y$ より

$$\big||r| - |s|\big| \le |r - s|.$$

(2) ${}^\forall \varepsilon > 0,\ {}^\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t.

$$^\forall n \ge N_\varepsilon, \quad \big||a_n| - |\alpha|\big| < \varepsilon$$

を示す．$\varepsilon > 0$ とする．仮定より ${}^\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t.

$$^\forall n \ge N_\varepsilon, \quad |a_n - \alpha| < \varepsilon.$$

よって，${}^\forall n \ge N_\varepsilon$，

$$\big||a_n| - |\alpha|\big| \le |a_n - \alpha| < \varepsilon.$$

以上より $|a_n| \to |\alpha|\ (n \to \infty)$. □

$\boxed{8}$ $\{a_n\}$ を数列とする．このとき，$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ ならば

$$\lim_{n\to\infty} c a_n = c\alpha$$

であることを ε-N 論法で証明せよ．ただし，$c \in \mathbb{R}$ は定数である．

解答例　${}^\forall \varepsilon > 0,\ {}^\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t.

$$^\forall n \ge N_\varepsilon, \quad |ca_n - c\alpha| < \varepsilon$$

を示す．$\varepsilon > 0$ とする．仮定より ${}^\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t.

$$^\forall n \ge N_\varepsilon, \quad |a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{1 + |c|}.$$

よって，${}^\forall n \ge N_\varepsilon$，

$$\begin{aligned}
|ca_n - c\alpha| &= |c||a_n - \alpha| \\
&\le \big(1 + |c|\big)|a_n - \alpha| \\
&< \big(1 + |c|\big)\frac{\varepsilon}{1 + |c|} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

以上より，$\lim_{n\to\infty} ca_n = c\alpha$. □

注

$$a_n \to \alpha, \quad (n \to \infty)$$

と表記するのも，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

と表記するのも同じことである．ただし，よくある誤植として

$$\lim_{n\to\infty} a_n \to \alpha$$

と書いてしまう人がいるが，これは間違いである．

$\boxed{9}$ 一般項が次のように与えられた数列 $\{a_n\}$ の 0 への収束を ε-N 論法で証明せよ.

(1) $a_n := \dfrac{2}{n}$

(2) $a_n := \dfrac{1}{n}\sin\dfrac{2\pi}{n}$

解答例 (1) $\varepsilon > 0$ とする. アルキメデスの原理より, ${}^{\exists}N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t.

$$\frac{2}{\varepsilon} < N_\varepsilon.$$

このとき,

$$\frac{2}{N_\varepsilon} < \varepsilon.$$

よって, ${}^{\forall}n \geq N_\varepsilon$,

$$\begin{aligned}\left|\frac{2}{n} - 0\right| &= \frac{2}{n} \\ &\leq \frac{2}{N_\varepsilon} \\ &< \varepsilon.\end{aligned}$$

以上より

$$a_n \to 0 \quad (n \to +\infty).$$

□

(2) $\varepsilon > 0$ とする. アルキメデスの原理より, ${}^{\exists}N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t.

$$\frac{1}{\varepsilon} < N_\varepsilon.$$

このとき,

$$\frac{1}{N_\varepsilon} < \varepsilon.$$

よって, ${}^{\forall}n \geq N_\varepsilon$,

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{n}\sin\frac{2\pi}{n} - 0\right| &= \frac{1}{n}\left|\sin\frac{2\pi}{n}\right| \\ &\leq \frac{1}{n} \\ &\leq \frac{1}{N_\varepsilon} \\ &< \varepsilon.\end{aligned}$$

以上より

$$a_n \to 0 \quad (n \to +\infty).$$

□

$\boxed{10}$ 次の主張の真偽を判定して**すべての番号の横の○か×を選べ**. そのうち正しい主張を 1 つを選んで ε-N 論法で証明せよ.

(1) [○ · ×] 収束する数列は有界である.

(2) [○ · ×] 収束する数列の極限は必ずしも 1 つに定まるわけではない.

(3) [○ · ×] 有界な数列は収束する部分列を持つ.

(4) [○ · ×] 発散する数列 $\{a_n\}$ は, $|a_n| \to \infty (n \to \infty)$ を満たす.

(5) [○ · ×] 収束する数列は必ずコーシー列である.

私が選んだのは (1)

解答例 (1) ○ $\{a_n\}$ を数列とし, $a_n \to \alpha$ $(n \to \infty)$ と仮定する. このとき, ${}^{\forall}\varepsilon > 0$, ${}^{\exists}N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t.

$${}^{\forall}n \geq N_\varepsilon, \quad |a_n - \alpha| < \varepsilon.$$

$\varepsilon := 1$ に対しても成り立つので, ${}^{\exists}N_1 \in \mathbb{N}$ s.t.

$${}^{\forall}n \geq N_1, \quad |a_n - \alpha| < 1.$$

つまり, $n \geq N_1$ に対しては, 三角不等式より

$$|a_n| \leq |a_n - \alpha| + |\alpha| < 1 + |\alpha|$$

と言える. $M := \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{N_1-1}|, 1 + |\alpha|\}$ とおけば

$${}^{\forall}n \in \mathbb{N}, \quad |a_n| \leq M.$$

つまり, $\{a_n\}$ は有界である. よって成立. □

(2) × 収束する数列の極限は必ず 1 つに定まる. 収束先を $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ とおくと, $\alpha = \beta$ が証明できる.

(3) ○ Bolzano—Weierstrass の定理そのものである. 証明に選んでもいいが長くて大変.

(4) × 収束しない場合を発散と定義するが, 発散には「$+\infty$ に発散」,「$-\infty$ に発散」の他に「振動」があり, 振動の場合には必ずしも $|a_n| \to \infty$ を満たさない.

(5) ○ $\{a_n\}$ を数列とし, $a_n \to \alpha$ $(n \to \infty)$ と仮定する. このとき, ${}^{\forall}\varepsilon > 0$, ${}^{\exists}N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t.

$${}^{\forall}n \geq N_\varepsilon, \quad |a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

よって, 三角不等式より ${}^{\forall}n, m \geq N_\varepsilon$,

$$\begin{aligned}|a_n - a_m| &\leq |a_n - \alpha| + |\alpha - a_m| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon.\end{aligned}$$

ゆえに, $\{a_n\}$ は Cauchy 列である. □