

令和7年度 微積分及び演習I 小テスト対策問題 No.1

数理・知能・電子・機械・応化・環境 課程 _____ 回生 _____

学生番号 _____ 名前 _____

1 U_α, B, A_λ を集合とする ($\alpha \in I, \lambda \in \Lambda$ は添え字, 及び添え字集合とする). このとき, **集合の等号, 包含関係の定義に従って**次を証明せよ.

(1)

$$B \cup \left(\bigcap_{\alpha \in I} U_\alpha \right) \subset \bigcap_{\alpha \in I} (B \cup U_\alpha)$$

(2)

$$\left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \right)^c = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^c$$

2 $r \in \mathbb{R}$ とし, A_r, B_r をそれぞれ

$$A_r := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - r)^2 + (y + r)^2 \leq 1\},$$

$$B_r := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 + |r|\}.$$

このとき, 集合 $\bigcup_{r \in \mathbb{R}} A_r$ と $\bigcap_{r \in \mathbb{R}} B_r$ がどのような集合になるか図示せよ (図示するだけでよく証明は求めない).

$$\bigcup_{r \in \mathbb{R}} A_r$$

$$\bigcap_{r \in \mathbb{R}} B_r$$

3 **集合の等号の定義に従って**次を証明せよ.

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[\frac{1}{n}, 1 \right] = (0, 1]$$

4 $E \subset \mathbb{R}$ を空でない有界な集合とする. β を E の最大下界 $\inf E$ とおくと, その言葉の定義から β は次の2つの条件を満たすことを証明せよ:

$$\begin{cases} \text{(i)} & \forall x \in E, \quad x \geq \beta; \\ \text{(ii)} & \forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in E \quad \text{s.t.} \quad \beta + \varepsilon > x_\varepsilon. \end{cases}$$

5 $A, B \subset \mathbb{R}$ を空でない有界な集合とする. 次を証明せよ.

(1) $A \subset B$ ならば $\inf A \geq \inf B$.

(2) $E := \{x + y : x \in A, y \in B\}$ とおくと

$$\sup E \geq \sup A + \sup B.$$

(3) $-A := \{-x : x \in A\}$, いかえると $-A := \{z : \exists x \in A \text{ s.t. } z = -x\}$ とおく. このとき

$$\sup(-A) = -\inf A.$$

(4) $\forall a \in A, \forall b \in B, a \leq b$ が成立するならば

$$\sup A \leq \inf B.$$