令和7年度 微積分及び演習I 小テスト対策問題 No.1

数理・知能・電子・機械・応化・環境　課程　＿＿　回生　　　学生番号 ＿＿＿＿＿＿＿　名前 ＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ $U_\alpha,\ B,\ A_\lambda$ を集合とする ($\alpha \in I,\ \lambda \in \Lambda$ は添え字, 及び添え字集合とする). このとき, **集合の等号, 包含関係の定義に従って**次を証明せよ.

(1)
$$B \cup \left(\bigcap_{\alpha \in I} U_\alpha\right) \subset \bigcap_{\alpha \in I} (B \cup U_\alpha)$$

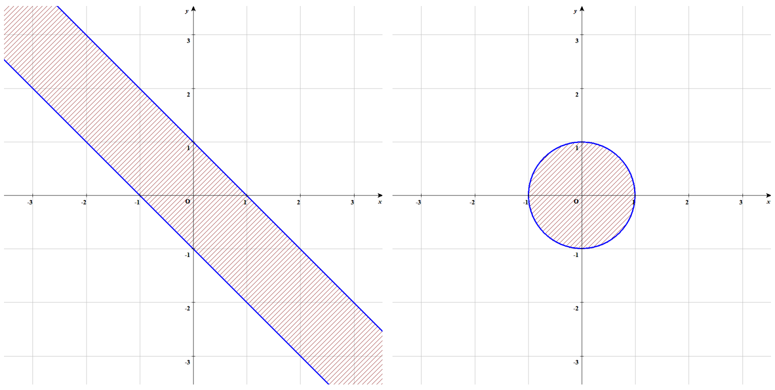
(2)
$$\left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right)^c = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^c$$

解答例　(1) ($\subset$) を示す. $x \in B \cup \left(\bigcap_{\alpha \in I} U_\alpha\right)$ とする. 和集合の定義より $x \in B$, または $x \in \bigcap_{\alpha \in I} U_\alpha$.
(i) $x \in B$ のとき, ${}^\forall \alpha \in I$, $x \in B \cup U_\alpha$. よって共通部分の定義より
$$x \in \bigcap_{\alpha \in I} (B \cup U_\alpha).$$
(ii) $x \in \bigcap_{\alpha \in I} U_\alpha$ のとき, 共通部分の定義より ${}^\forall \alpha \in I$, $x \in U_\alpha$, つまり $x \in B \cup Y_\alpha$. 再び共通部分の定義より
$$x \in \bigcap_{\alpha \in I} (B \cup U_\alpha).$$
よって, ($\subset$) が成立. □

(2) ($\subset$) を示す. $x \in \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right)^c$ とする. 補集合の定義から $x \notin \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$. つまり, ${}^\exists \lambda_0 \in \Lambda$ s.t.
$$x \notin A_{\lambda_0}$$
(実際, もしそうでなければ, ${}^\forall \lambda \in \Lambda$, $x \in A_\lambda$ となるが, このとき $x \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ となり矛盾). ゆえに,
$$x \in A_{\lambda_0}^c$$
が得られるので
$$x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^c.$$
よって ($\subset$) が成立.
($\supset$) を示す. $x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^c$ とする. 和集合の定義より ${}^\exists \lambda_0 \in I$ s.t.
$$x \in A_{\lambda_0}^c,$$
すなわち
$$x \notin A_{\lambda_0}.$$
このとき,
$$x \notin \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$$
(実際, もしそうでなければ, ${}^\forall \lambda \in \Lambda$, $x \in A_\lambda$ となるが, $x \notin A_{\lambda_0}$. に矛盾). ゆえに補集合の定義から
$$x \in \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right)^c.$$
よって ($\supset$) が成立.
　以上により等号が成立. □

$\boxed{2}$ $r \in \mathbb{R}$ とし, $A_r,\ B_r$ をそれぞれ
$$A_r := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-r)^2 + (y+r)^2 \le 1\},$$
$$B_r := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1 + |r|\}.$$
このとき, 集合 $\bigcup_{r \in \mathbb{R}} A_r$ と $\bigcap_{r \in \mathbb{R}} B_r$ がどのような集合になるか図示せよ (図示するだけでよく証明は求めない).

$$\bigcup_{r \in \mathbb{R}} A_r \qquad\qquad \bigcap_{r \in \mathbb{R}} B_r$$



$\boxed{3}$ **集合の等号の定義に従って**次を証明せよ.
$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[\frac{1}{n}, 1\right] = (0, 1]$$

解答例　($\subset$) を示す. $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [1/n, 1]$ とする. 和集合の定義より ${}^\exists n_x \in \mathbb{N}$ s.t. $x \in [1/n_x, 1]$ すなわち,
$$0 < \frac{1}{n_x} \le x \le 1$$
より $x \in (0, 1]$. ゆえに ($\subset$) が成立.
($\supset$) を示す. $x \in (0, 1]$ とする. すなわち, $0 < x \le 1$. $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [1/n, 1]$ を背理法で示す. もしそうでないなら
$${}^\forall n \in \mathbb{N},\quad x < \frac{1}{n} \text{ または } x > 1$$
となるが, $x \le 1$ より,
$${}^\forall n \in \mathbb{N},\quad x < \frac{1}{n}$$
となる. このとき, $x > 0$ に注意すると
$$\frac{1}{x} > n.$$
つまり, $1/x$ は $\mathbb{N}$ の上界となり, アルキメデスの原理に矛盾する. ゆえに $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [1/n, 1]$ となり, ($\supset$) が成立する.
　以上より等号成立. □

$\boxed{4}$ $E \subset \mathbb{R}$ を空でない有界な集合とする．β を E の最大下界 $\inf E$ とおくと，その言葉の定義から β は次の 2 つの条件を満たすことを証明せよ:

$$\begin{cases} \text{(i)} & {}^{\forall} x \in E, \quad x \geq \beta; \\ \text{(ii)} & {}^{\forall}\varepsilon > 0, {}^{\exists} x_\varepsilon \in E \quad \text{s.t.} \quad \beta + \varepsilon > x_\varepsilon. \end{cases}$$

解答例　$\beta := \inf E$ とおく．このとき β は E の最大下界なので下界である．よって下界の定義から

$${}^{\forall} x \in E, \quad x \geq \beta$$

を得る．よって (i) が成立する．次に (ii) を背理法で示す．(ii) を満たさないと仮定すると (ii) の否定: ${}^{\exists}\varepsilon_0 > 0$ s.t.

$${}^{\forall} x \in E, \quad \beta + \varepsilon_0 \leq x$$

が成立する．よって，$\beta + \varepsilon_0$ も E の下界の 1 つであると分かる．しかし，

$$\beta + \varepsilon_0 > \beta$$

が成立するので，$\beta + \varepsilon_0$ は β より大きな E の下界となり，β の最大性に矛盾する．よって (ii) が成立する．

$\boxed{5}$ $A, B \subset \mathbb{R}$ を空でない有界な集合とする．次を証明せよ．

(1) $A \subset B$ ならば $\inf A \geq \inf B$.

(2) $E := \{x + y : x \in A, y \in B\}$ とおくと

$$\sup E \geq \sup A + \sup B.$$

(3) $-A := \{-x : x \in A\}$, いいかえると $-A := \{z : {}^{\exists} x \in A \text{ s.t. } z = -x\}$ とおく．このとき

$$\sup(-A) = -\inf A.$$

(4) ${}^{\forall} a \in A, {}^{\forall} b \in B$, $a \leq b$ が成立するならば

$$\sup A \leq \inf B.$$

解答例　(1) $\beta := \inf B$ とおく．最大下界の定義より，

$${}^{\forall} x \in B, \quad x \geq \beta.$$

ここで，$y \in A$ とする．仮定より $y \in B$ なので，

$$y \geq \beta.$$

つまり，β は A の下界の 1 つである．一方，$\inf A$ は A の最大下界なので

$$\inf A \geq \beta = \inf B.$$

□

(2) $\alpha := \sup A$, $\beta := \sup B$ とおく．最小上界 (上限) の定義より，${}^{\forall}\varepsilon > 0$, ${}^{\exists} x_a \in A$, ${}^{\exists} x_b \in B$ s.t.

$$\alpha - \frac{\varepsilon}{2} < x_a, \quad \beta - \frac{\varepsilon}{2} < x_b.$$

ここで，E の定義より $x_a + x_b \in E$ なので sup の定義から

$$x_a + x_b \leq \sup E$$

ゆえに

$$\alpha + \beta - \varepsilon < x_a + x_b \leq \sup E,$$
$$\alpha + \beta < \sup E + \varepsilon.$$

$\varepsilon > 0$ の任意性より

$$\sup A + \sup B \leq \sup E.$$

□

(3) $\alpha := \sup(-A)$ とおく．最小上界の定義より

$$\begin{cases} \text{(i)} & {}^{\forall} x \in (-A), \quad x \leq \alpha; \\ \text{(ii)} & {}^{\forall}\varepsilon > 0, {}^{\exists} x_\varepsilon \in (-A) \text{ s.t. } \alpha - \varepsilon < x_\varepsilon. \end{cases}$$

ここで，${}^{\forall} y \in A$, $-y \in (-A)$ なので (i) より

$$-y \leq \alpha,$$

つまり

$$y \geq -\alpha$$

を満たす．次に (ii) より ${}^{\forall}\varepsilon > 0, {}^{\exists} x_\varepsilon \in (-A)$ s.t. $\alpha - \varepsilon < x_\varepsilon$. つまり

$$-\alpha + \varepsilon > -x_\varepsilon.$$

ここで，$-x_\varepsilon \in A$ なので，$y_\varepsilon := -x_\varepsilon$ とおけば，以上をまとめると

$$\begin{cases} \text{(i)} & {}^{\forall} y \in A, \quad y \geq -\alpha; \\ \text{(ii)} & {}^{\forall}\varepsilon > 0, {}^{\exists} y_\varepsilon \in A \text{ s.t. } -\alpha + \varepsilon > y_\varepsilon. \end{cases}$$

と言える．つまり $-\alpha$ は A の最大下界であるので

$$-\alpha = \inf A,$$

つまり

$$\sup(-A) = \alpha = -\inf A.$$

□

(4) 仮定より，$a \in A$ とすると次が成立する:

$${}^{\forall} b \in B, \quad a \leq b.$$

よって a は B の下界の 1 つである．一方 $\inf B$ は B の最大下界なので

$$a \leq \inf B$$

が成立する．次に $a \in A$ は任意に選べるので，上の式より $\inf B$ は A の上界の 1 つである．一方 $\sup A$ は最小上界であったので

$$\sup A \leq \inf B$$

を得る．

□