2026/06/12/No.8

微積分及び演習 I・自習シート

問 1 X, Y を集合とし, $f: X \to Y$ とする．次を証明せよ．ただし, I は添え字の集合である．

(1) $B \subset Y$ ならば
$$f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$$

(2) $B_\alpha \subset Y$ ならば
$$f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in I} f^{-1}(B_\alpha)$$

(3) $A_\alpha \subset X$ ならば
$$f\left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in I} f(A_\alpha)$$

(4) $A_\alpha \subset X$ ならば
$$f\left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\right) \subset \bigcap_{\alpha \in I} f(A_\alpha)$$

問 2 問 1 の (4) の逆向きの包含関係は一般には成立しない．その例を見つける．$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) = x^2$ とする．
$$f(A_1 \cap A_2) \not\supset f(A_1) \cap f(A_2)$$
となるような A_1 と A_2 の例を見つけよ．

問 3 $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ とし, 行列を用いて $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を
$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$
で定義する [1]．ただし, ここでは $\mathbb{R}^2$ の元 $\boldsymbol{x}$ を
$$\boldsymbol{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$
のように縦に並べてかくことにする [2]．このとき, $ad - bc \neq 0$ ならば f が全単射であることを証明せよ．

問 4 $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ とし, さらに $h: X \to Z$ を
$$h(x) := g(f(x)) \quad (x \in X)$$
と定義する (合成写像)．(1) と (2) を証明せよ．

(1) h が単射であれば, f も単射である．

(2) h が全射であれば, g も全射である．

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと．提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です．

[1]
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{とは} \begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 \\ cx_1 + dx_2 \end{pmatrix} \text{のこと．}$$

[2] つまり, $(x_1, x_2)^\mathsf{T}$ のこと．