

微積分及び演習I・自習シート

問1 数列 $\{a_n\}$ の一般項を

$$a_n := 2n$$

とおく. $\{a_n\}$ の部分列 $\{a_{n_k}\}$ として

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad n_k := 3k$$

で定める. n_1, n_2, n_9 と $a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_9}$ の値をそれぞれ求めよ.

問2 例題を参考に、一般項が与えられた数列 $\{a_n\}$ に対して、 n_k を次のように定めるとき、次の数列 $\{a_n\}$ の部分列 $\{a_{n_k}\}$ について初項から第5項までを列挙せよ.

例題 一般項が $a_n := 3n + 1$ で与えられる数列

$$\begin{array}{cccccccccccc} a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & a_5, & a_6, & a_7, & a_8, & a_9, & a_{10}, & \dots \\ 4, & 7, & 10, & 13, & 16, & 19, & 22, & 25, & 28, & 31, & \dots \end{array}$$

に対して $n_k := 2k$ で定義される部分列 $\{a_{n_k}\}$ は

$$\text{第1項 } a_{n_1} = a_2 = 3 \cdot 2 + 1 = 7,$$

$$\text{第2項 } a_{n_2} = a_4 = 3 \cdot 4 + 1 = 13,$$

$$\text{第3項 } a_{n_3} = a_6 = 3 \cdot 6 + 1 = 19,$$

$$\text{第4項 } a_{n_4} = a_8 = 3 \cdot 8 + 1 = 25,$$

$$\text{第5項 } a_{n_5} = a_{10} = 3 \cdot 10 + 1 = 31.$$

- (1) 一般項が $a_n := 3n + 1$ で与えられる数列の、 $n_k := 3k$ で定義される部分列 $\{a_{n_k}\}$.
- (2) 一般項が $a_n := (-1)^n + 1$ で与えられる数列の、 $n_k : k$ 番目の素数 $(2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \dots)$ で定義される部分列 $\{a_{n_k}\}$.
- (3) 一般項が $a_n := 4n - 1$ で与えられる数列の、 $n_k := k$ で定義される部分列 $\{a_{n_k}\}$.

問3 数列 $\{S_n\}$ を

$$S_1 := 0.9, \quad S_2 := 0.99 = 0.09 + 0.9, \quad S_3 := 0.999 = 0.009 + 0.09 + 0.9,$$

$$S_n := \sum_{k=1}^n 9 \times 10^{-k}$$

で定義する. 次の問いに答えよ.

- (1) $\{S_n\}$ は上に有界な列であることを示せ.
- (2) $\{S_n\}$ は単調増加列であることを示せ.
- (3) $\{S_n\}$ は収束することを示せ.

(4) (3) より $\{S_n\}$ は収束することが分かるので, その収束先を

$$0.999\dots$$

もしくはより丁寧に

$$0.\dot{9}$$

と書くことにする. 収束先 $0.\dot{9}$ は 1 であることを厳密に証明せよ, すなわち

$$0.999\dots = 0.\dot{9} = 1$$

であることを「数列 S_n は 1 に収束することを ε - N 論法を用いて示す」ことで証明せよ.