

微積分及び演習I・自習シート

問1 $\{a_n\}$ を数列, $\alpha \in \mathbb{R}$ とする. $a_n \rightarrow \alpha$ ($n \rightarrow \infty$) ならば

$$|a_n| \rightarrow |\alpha| \quad (n \rightarrow \infty)$$

を ε - N 論法で証明せよ¹⁾

数列の極限は ε - N 論法によって定義されることを学んだ. また, 極限の概念として, 数列 $\{a_n\}$ の極限值 α とは, ある $n \in \mathbb{N}$ で到達できるかどうかは分からないが, 口語的に言えば「目標としている値」「ゴールとしている値」のようなものであることも学んだ. しかし, 数列が収束する場合, 到達するかどうか分からない値という状態で, 極限值は明確に1つに定まるのだろうか? 複数の値に近づいているということは起こりえないのだろうか?

問2 数列 $\{a_n\}$ が収束するならば, 収束先は必ず1つに定まることを ε - N 論法で証明していく. 次の問いに答えよ.

(1) $\{a_n\}$ の収束先を $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ とおく. 数列 $\{a_n\}$ が α に収束することの定義を ε - N 論法でかけ. また, 数列 $\{a_n\}$ が β に収束することの定義を ε - N 論法でかけ.

(2)

$$\forall \varepsilon > 0, \quad |\alpha - \beta| < \varepsilon$$

であることを証明せよ.

(3) 一般に数列が収束するとき, 収束先は必ず1つに定まることを証明せよ.

問3 $\{a_n\}$ を有界な数列とし, $n \in \mathbb{N}$ に対して集合 $S_n \subset \mathbb{R}$ を

$$S_n := \{a_k \in \mathbb{R} : k \geq n\}$$

とおく, すなわち

$$S_1 = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}, \quad S_2 = \{a_2, a_3, a_4, \dots\}, \quad S_3 = \{a_3, a_4, a_5, \dots\}.$$

次に, 各 S_n の最小上界, 最大下界を使って数列 $\{\bar{a}_n\}$, $\{\underline{a}_n\}$ を次のように定義する:

$$\bar{a}_n := \sup S_n, \quad \underline{a}_n := \inf S_n.$$

このとき, $\{\bar{a}_n\}$ は単調減少列, $\{\underline{a}_n\}$ は単調増加列であることをそれぞれ証明せよ²⁾.

問4 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ と実数 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対して,

$$a_n \rightarrow \alpha, \quad b_n \rightarrow \beta \quad (n \rightarrow \infty)$$

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点しておくこと. 提出しなくても試験で60点以上取れば合格です.

¹⁾ $r, s \in \mathbb{R}$, $||r| - |s|| \leq |r - s|$ を用いるとよい.

²⁾ 数列 $\{b_n\}$ が単調増加列であるとは,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n \leq b_{n+1}$$

によって定義される. 単調減少列も同様に定義される

とする. このとき

$$a_n b_n \rightarrow \alpha \beta \quad (n \rightarrow \infty)$$

を ε - N 論法で証明せよ ($\{a_n\}$ は収束列であるので有界であることに注意し, テキスト P.36 も参考にせよ. 必ずしもテキスト通りである必要はない).