

微積分及び演習I・自習シート

問1 $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}$ をそれぞれ空でない上に有界な集合とする. また

$$E := \{x + y \in \mathbb{R} : x \in E_1, y \in E_2\}$$

とおく. このとき,

$$\sup E \geq \sup E_1 + \sup E_2$$

を証明せよ.

問2 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ をそれぞれ

$$a_n : 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots$$

$$b_n : 0, -1, 0, -1, 0, -1, \dots$$

とおく. 次の問いに答えよ.

(1) 数列 $\{a_n\}$ を集合 $E_1 := \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ とみると,

$$E_1 = \{0, 1\}$$

である¹⁾. 数列 $\{b_n\}$ を集合 $E_2 := \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ と見たとき, E_2 を元を列挙する形で求めよ.

(2) 数列の \sup を

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} a_n := \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

で定義する. つまり, 数列を集合とみた最小上界と定義する. このとき,

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} (a_n + b_n) < \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n + \sup_{n \in \mathbb{N}} b_n$$

であることを示せ.

問3 $E \subset \mathbb{R}$ を空でない部分集合とする. $\alpha \in \mathbb{R}$ が

$$\alpha \in E \quad \text{かつ} \quad \forall x \in E, \alpha \leq x$$

を満たすとき α を E の最小値とよび $\min E$ とかく. E の最小値が存在するならば

$$\min E = \inf E$$

であることを証明せよ.

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点しておくこと. 提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.

¹⁾数列には順番があり, 例えば, 一般項が $a_n := n$ で定義される数列

$$a_n : 1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

において第 2 項と第 3 項を入れ換えた

$$b_n : 1, 3, 2, 4, 5, \dots$$

とは別の数列と見なす. しかし集合と見なす場合には, 順番は関係なく $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}, \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ どちらも

$$\{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

である.

問 4 一般項が次の様に与えられた数列 $\{a_n\}$ の 0 への収束を ε - N 論法で証明せよ.

(1) $a_n := \frac{1}{n^2}$

(2) $a_n := (-1)^n \frac{1}{n}$

(3) $a_n := \frac{1}{n} \sin n$

問 5 次の集合の等号を証明せよ.

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[0, 1 - \frac{1}{n} \right] = [0, 1)$$