微積分及び演習 I・自習シート

問 0　$C \in \mathbb{R}$ を定数とする．$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) = C$ で定義する (定数 C をずっととり続ける関数)．このとき，f の導関数 f' が $f'(x) = 0$ であることを**導関数の定義に従って**証明せよ．

問 1

定義　微分して $f(x)$ になる関数を $f(x)$ の**原始関数** (不定積分ではない) といい

$$\int f(x)dx$$

とかく (高校では原始関数の他の言い方として不定積分ともよんだが，実は両者はそれぞれ定義が異なるので原始関数と不定積分という言葉を使いわけることにする．「原始」とは「primitive」「根源的な」のような意味を持ち，つまり**微分して f になる関数 f のもと**のような意味がある)．

$\boxed{1}$ 一般に $F(x)$ を $f(x)$ の原始関数の 1 つとすると，定数 C を加えた関数 $F(x) + C$ も $f(x)$ の原始関数となることを証明せよ．(つまり，関数 $f(x)$ の原始関数は複数あり

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

のように一般的な形でかけることを意味する．)

$\boxed{2}$ 次の原始関数を定数 C を付けて一般形を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \sqrt[5]{x}\ dx$

(2) $\displaystyle\int \sin^3 x \cos x\ dx$

提出する場合は，解答例を参考にして自分で採点をしておくこと．提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です．

置換積分　$g = g(x)$ とおくとき，g が C^1 級ならば

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(g)dg$$

実際，$f(g)$ の原始関数の 1 つを $F(g)$ とおくと，$F'(g) = f(g)$ で，原始関数の定義から

$$\int f(g)dg = F(g)$$

とかける．$F(g(x))$ を x について微分すれば，合成関数の微分法から

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}F(g(x)) &= \frac{dF}{dg}(g(x))\frac{dg}{dx}(x) \\ &= f(g(x))g'(x)\end{aligned}$$

よって，微分して $f(g(x))g'(x)$ になる関数は $F(g(x))$ なので

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(g(x))\frac{dg}{dx}(x)dx = F(g(x)) = F(g) = \int f(g)dg$$

これは高校生のときに学習したように，

$$dg = g'(x)dx$$

と形式的に変形して

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(g)dg$$

によって計算できることを示している．ちなみに $dg = g'(x)dx$ のことを g **の微分**とよぶ．

(3) $\displaystyle\int 2x\sqrt{x^2+1}\ dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^2}\ dx$

(5) $\displaystyle\int x^2e^{2x}dx$

(6) $\displaystyle\int \tan x\ dx$

(7) $\displaystyle\int \log x\ dx$

(8) $\displaystyle\int \mathrm{Tan}^{-1}x\ dx$

(9) $\displaystyle\int \frac{1}{1-x^2}\ dx$

問 2 [2 次式と分数型の積分] 以下の積分公式を用いると次の 4 つのグループの積分が計算できる:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\ dx = \log(x+\sqrt{1+x^2})+C \qquad \left(=: \mathrm{Sinh}^{-1}x+C\right),$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ dx = \mathrm{Sin}^{-1}x+C,$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\ dx = \mathrm{Tan}^{-1}x+C,$$

$$\int \frac{1}{1-x^2}\ dx = \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C \qquad \left(=: \mathrm{Tanh}^{-1}x+C\right)$$

例題

$$\int \frac{1}{\sqrt{-x^2+4x}}\ dx$$

は分母の 2 次関数 $-x^2+4x$ が

$$\begin{aligned} -x^2+4x &= -(x^2-4x+4)+4 \\ &= -(x-2)^2+4 \end{aligned}$$

部分積分

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

実際, $\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ より (微分して f' になるのは f なので f' の原始関数は f そのものなので $\int f'(x)dx$ の 1 つは $f(x)$ であることに注意して)

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= \int \{f(x)g(x)\}'dx \\ &= \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx \end{aligned}$$

よって,

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

と平方完成できるので, $X=\dfrac{x-2}{2}$ とおくと (全体を 4 で割ることを見据えて)

$$\begin{aligned}-x^2+4x &= -(x^2-4x+4)+4\\ &= -(x-2)^2+4\\ &= 4\left(-\left(\frac{x-2}{2}\right)^2+1\right)\\ &= 4(1-X^2)\end{aligned}$$

となり, $dX=\dfrac{1}{2}dx$ より $2dX=dx$ を用いて

$$\int\frac{1}{\sqrt{-x^2+4x}}\,dx=\int\frac{1}{\sqrt{4(1-X^2)}}\,2dX=\int\frac{1}{\sqrt{1-X^2}}\,dX$$

ゆえに 2 番目の公式を用いれば

$$\int\frac{1}{\sqrt{-x^2+4x}}\,dx=\int\frac{1}{\sqrt{1-X^2}}\,dX=\mathrm{Sin}^{-1}X+C=\mathrm{Sin}^{-1}\left(\frac{x-2}{2}\right)+C$$

を得る.

例題を参考に次を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{-x^2+4x-3}}\,dx$

(2) $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx$

(3) $\displaystyle\int\frac{1}{x^2-6x+13}\,dx$

(4) $\displaystyle\int\frac{1}{-4x^2+8x-3}\,dx$

発展　一般に $F(x)$ が $f(x)$ の原始関数ならば, $C'=0$ より $F(x)+C$ も $f(x)$ の原始関数となる. しかし $f(x)$ の原始関数が $F(x)+C$ で全て網羅されているかどうかはまだ分からない. $y=\cos x$ の原始関数は $y=\sin x+C$ だけだろうか. $y=\sin x+C$ とは全く異なる, まだ我々の知らない何か別の関数があって, 微分したら $y=\cos x$ になるかもしれない.

しかしそのようなことはなく, $f(x)$ の原始関数どうしの違いは定数だけであることを示していく.

$F_1(x)$ と $F_2(x)$ をそれぞれ $f(x)$ の任意の原始関数とする. このとき F_1 と F_2 の差は高々定数である*ことを示せ. ただし, 関数 $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ に対して $^\forall x\in[a,b], g'(x)=0$ ならば g は定数関数であることを用いてもよい.

*違いがあってもその差は定数という意味.