

## 微積分及び演習I・自習シート

問1 [高校までの復習] 次の関数を微分せよ.

$$(1) f(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

$$(2) f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$$

$$(3) f(x) = \frac{x^3}{1+x^2}$$

$$(4) f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$(5) f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$(6) f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$(7) f(x) = \log(1+x^2)$$

問2 Rolle の定理を用いて, 次の Cauchy の平均値の定理が成立することを証明せよ.

$I = [a, b]$ ,  $f, g \in C(I)$  で  $f, g$  はそれぞれ  $(a, b)$  上で微分可能であるとする. また,  $\forall x \in (a, b)$ ,  $g'(x) \neq 0$  と仮定する. このとき,  $\exists c \in (a, b)$  s.t.

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

証明  $h(x) := (g(b) - g(a))f(x) - (f(b) - f(a))g(x)$  とおけばよい. 実際...

発展 次の定理の証明を確認しておこう.

$I := (a, b)$ ,  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  は  $I$  上で単調増加かつ微分可能で  $f'(x) \neq 0$  とする. このとき, 逆関数  $f^{-1}: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$  は  $(\alpha, \beta) := (f(a), f(b))$  上で微分可能で

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} \quad (\text{ただし, } x = f^{-1}(y))$$

すなわち,  $y = f(x)$ ,  $x = f^{-1}(y)$  とおけば

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

証明  $y = f(x)$ ,  $x = f^{-1}(y)$  とおく.  $x_0 \in I$  とする.  $y_0 := f(x_0) \in (\alpha, \beta)$  上で  $x = f^{-1}(y)$  は微分可能であることを示す. 前提として,  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  が単調増加かつ  $f'(x) \neq 0$  より, 狭義単調増加となるので全単射である<sup>1)</sup>. すなわち逆関数  $f^{-1}: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$  が存在する. さらにその  $f^{-1}$  も狭義単調増加となる (実際,  $y_1 < y_2$  にもかかわらず  $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$  が成立しない, つまり

$$f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$$

だとすると,  $f$  の狭義単調性より

$$y_1 = f(f^{-1}(y_1)) \geq f(f^{-1}(y_2)) = y_2$$

となり矛盾.  $y_1 > y_2$  のときも同様. よって  $f^{-1}$  も狭義単調増加となる).

まず,  $y_0 := f(x_0) \in (\alpha, \beta)$  上で  $x = f^{-1}(y)$  は連続であることを示す.  $x_0 = f^{-1}(y_0)$  に注意すれば

$$a < x_0 < b, \quad \alpha = f(a) < y_0 < f(b) = \beta$$

である.  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $x_0 - \varepsilon < x_0 < x_0 + \varepsilon$  より狭義単調性から

$$f(x_0 - \varepsilon) < y_0 < f(x_0 + \varepsilon)$$

を得る. そこで,  $\delta_\varepsilon := \min\{y_0 - f(x_0 - \varepsilon), f(x_0 + \varepsilon) - y_0\}$  とおくと,  $\forall y; |y - y_0| < \delta_\varepsilon$

$$-\delta_\varepsilon < y - y_0 < \delta_\varepsilon,$$

$$f(x_0) - \delta_\varepsilon < y < f(x_0) + \delta_\varepsilon,$$

$$f(x_0) - (y_0 - f(x_0 - \varepsilon)) < y < f(x_0) + (f(x_0 + \varepsilon) - y_0),$$

$$f(x_0 - \varepsilon) < y < f(x_0 + \varepsilon),$$

よって  $f^{-1}$  の狭義単調性から

$$x_0 - \varepsilon < f^{-1}(y) < x_0 + \varepsilon$$

つまり,

$$|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| = |f^{-1}(y) - x_0| < \varepsilon.$$

最後に,  $y_0 \in (f(a), f(b))$  上で微分可能であることを示す.  $h \in \mathbb{R}: h \neq 0$  とし,  $k := f^{-1}(y_0 + h) - f^{-1}(y_0)$  とおくと,  $k \neq 0$  でさらに  $f^{-1}$  の連続性より

$$k \rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0)$$

を得る. また,

$$k + f^{-1}(y_0) = f^{-1}(y_0 + h),$$

$$k + x_0 = f^{-1}(y_0 + h)$$

より  $f$  を作用させれば

$$f(k + x_0) = f(f^{-1}(y_0 + h)) = y_0 + h = f(x_0) + h$$

<sup>1)</sup> 実際,  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  が狭義単調増加ならば,  $f(a) < f(b)$  で  $f((a, b)) = (f(a), f(b))$  なので全射であり,  $x_1, x_2 \in (a, b): x_1 \neq x_2$  ならば,  $x_1 < x_2$  か  $x_1 > x_2$  のいずれかだが, 狭義単調性より  $f(x_1) < f(x_2)$  か  $f(x_1) > f(x_2)$  となり単射である.

なので,

$$h = f(x_0 + k) - f(x_0)$$

に注意して

$$\begin{aligned} \frac{f^{-1}(y_0 + h) - f^{-1}(y_0)}{h} &= \frac{k}{f(x_0 + k) - f(x_0)} \\ &= \frac{1}{\frac{f(x_0 + k) - f(x_0)}{k}} \\ &\rightarrow \frac{1}{f'(x_0)} \quad (h \rightarrow 0). \end{aligned}$$

これが任意の  $y_0 \in (f(a), f(b))$  で成立するので,  $f^{-1}$  は区間  $(f(a), f(b))$  上で微分可能で,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

□