微積分及び演習 I・自習シート

問 1 [高校までの復習] 導関数の定義を用いて, 次の関数の導関数を求めよ.

(1) $f(x) = x^2$

(2) $f(x) = \sqrt{x}$

(3) $f(x) = \frac{1}{x}$

(4) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

(5) $f(x) = x^n$ (ただし $n \in \mathbb{N}$)

解答　(1) 点 x における変化の割合について

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{(x+h)^2-x^2}{h}\\ &= \frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h}\\ &= \frac{2xh+h^2}{h}\\ &= 2x+h \to 2x \quad (h \to 0).\end{aligned}$$

よって極限が存在したので, f は点 x で微分可能でその導関数は

$$f'(x) = 2x.$$

(2) 点 x における変化の割合について

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\\ &= \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}\\ &= \frac{(x+h)-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}\\ &= \frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}\\ &= \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} \to \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (h \to 0).\end{aligned}$$

よって極限が存在したので, f は点 x で微分可能でその導関数は

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと. 提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.

(3) 点 x における変化の割合について

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h} \\ &= \frac{\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}}{h} \\ &= \frac{\frac{-h}{x(x+h)}}{h} \\ &= -\frac{1}{x(x+h)} \to -\frac{1}{x^2} \quad (h \to 0).\end{aligned}$$

よって極限が存在したので, f は点 x で微分可能でその導関数は

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

(4) 点 x における変化の割合について, $a^3-b^3=(a+b)(a^2+ab+b^2)$ に注意して

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h} \\ &= \frac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h} \cdot \frac{(\sqrt[3]{x+h})^2+\sqrt[3]{x+h}\sqrt[3]{x}+(\sqrt[3]{x})^2}{(\sqrt[3]{x+h})^2+\sqrt[3]{x+h}\sqrt[3]{x}+(\sqrt[3]{x})^2} \\ &= \frac{(x+h)-x}{h((\sqrt[3]{x+h})^2+\sqrt[3]{x+h}\sqrt[3]{x}+(\sqrt[3]{x})^2)} \\ &= \frac{h}{h((\sqrt[3]{x+h})^2+\sqrt[3]{x+h}\sqrt[3]{x}+(\sqrt[3]{x})^2)} \\ &= \frac{1}{(\sqrt[3]{x+h})^2+\sqrt[3]{x+h}\sqrt[3]{x}+(\sqrt[3]{x})^2} \to \frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2} \quad (h \to 0).\end{aligned}$$

よって極限が存在したので, f は点 x で微分可能でその導関数は

$$f'(x) = \frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2}.$$

(5) 点 x における変化の割合について, $(x+h)^n = x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + \frac{n(n-1)}{2}x^2h^{n-2} + nxh^{n-1} + h^n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k x^{n-k}h^k$ に注意して

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{(x+h)^n-x^n}{h} \\ &= \frac{x^n+nx^{n-1}h+{}_n\mathrm{C}_3x^{n-2}h^2+\cdots+nxh^{n-1}+h^n-x^n}{h} \\ &= \frac{nx^{n-1}h+{}_n\mathrm{C}_3x^{n-2}h^2+\cdots+nxh^{n-1}+h^n}{h} \\ &= nx^{n-1}+h({}_n\mathrm{C}_3x^{n-2}+\cdots+h^{n-2}) \to nx^{n-1} \quad (h \to 0).\end{aligned}$$

よって極限が存在したので, f は点 x で微分可能でその導関数は

$$f'(x) = nx^{n-1}.$$

問 2 [高校までの復習] 微分公式を用いて次の関数を微分せよ.

(1) $f(x) = 2x$

(2) $f(x) = 2$

(3) $f(x) = x^2$

(4) $f(x) = \sqrt{x}$

(5) $f(x) = \sin x$

(6) $f(x) = \sin 2x$

(7) $f(x) = \sin x^2$

(8) $f(x) = \sqrt{1+x^2}$

(9) $f(x) = \sqrt{1+\sin x}$

(10) $f(x) = 2^x$

(11) $f(x) = e^x$

(12) $f(x) = e^{2x}$

(13) $f(x) = e^{x^2}$

(14) $f(x) = 1/(1+x^2)$

(15) $f(x) = e^x \sin x$

(16) $f(x) = \tan x$

(17) $f(x) = \log x \ (x > 0)$

(18) $f(x) = \log(\tan x) \ (0 < x < \pi/2)$

(19) $f(x) = \log(x + \sqrt{1+x^2}) \ (x > 0)$

(20) $f(x) = x^x \ (x > 0)$

解答

(1) $f'(x) = 2$

(2) $f'(x) = 0$

(3) $f'(x) = 2x$

(4)

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

(5) $f'(x) = \cos x$

(6) $f'(x) = (\cos 2x)(2x)' = 2\cos 2x$

(7) $f'(x) = (\cos x^2)(x^2)' = 2x\cos x^2$

(8)

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x^2)^{-1/2}(1+x^2)' = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

(9)

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1+\sin x)^{-1/2}(1+\sin x)' = \frac{\cos x}{2\sqrt{1+\sin x}}$$

(10) $f'(x) = (\log 2)2^x$

(11) $f'(x) = e^x$

(12) $f'(x) = e^{2x}(2x)' = 2e^{2x}$

(13) $f'(x) = e^{x^2}(x^2)' = 2xe^{2x}$

(14)

$$f'(x) = -1(1+x^2)^{-2}(1+x^2)' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

(15) $f'(x) = (e^x)'\sin x + e^x(\sin x)' = e^x \sin x + e^x \cos x = e^x(\sin x + \cos x)$

(16)

$$f'(x) = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

(17) $f'(x) = 1/x \ (x > 0)$

(18)

$$f'(x) = \frac{1}{\tan x}(\tan x)' = \frac{\cos x}{\sin x}\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\sin x \cos x} \quad (0 < x < \pi/2)$$

(19)

$$f'(x) = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}(x+\sqrt{1+x^2})' = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

(20) $x > 0$ とし, $y = f(x)$ とおく. $\log y = \log(x^x) = x\log x$ より右辺を x で微分すると

$$\frac{d}{dx}(x\log x) = (x)'\log x + x(\log x)' = \log x + x\frac{1}{x} = \log x + 1$$

一方, 左辺を x で微分すると

$$\frac{d}{dx}(\log y) = \frac{d}{dy}(\log y)\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}y'$$

つまり

$$\frac{1}{y}y' = 1 + \log x$$

よって

$$f'(x) = y' = y(1+\log x) = x^x(1+\log x)$$

問 3 教科書 p.64 の定理 2.2 を参考に, 次の定理を証明せよ: $a, b \in \mathbb{R} : a < b$ とし, $f \in C([a,b])$ とする.

(1) 像 $f([a,b])$ は $\mathbb{R}$ の有界な集合である.

証明　像 $f([a,b])$ が $\mathbb{R}$ の有界な集合であることを背理法で示す．$f([a,b])$ が有界ではないと仮定すると，有界であることの否定

$$\neg\ \boxed{\exists M>0\ \boxed{\forall y\in f([a,b]),\ \boxed{|y|\le M}}}$$

より

$$\boxed{\forall M>0\ \boxed{\exists y\in f([a,b]),\ \boxed{|y|>M}}}$$

なので，特に $M>0$ として自然数 $n\in\mathbb{N}$ を選んでも，やはり ${}^{\exists}y_n\in f([a,b])$ s.t.

$$|y_n|>n$$

が成立する．像の定義より，${}^{\exists}x_n\in[a,b]$ s.t. $y_n=f(x_n)$．ここで，数列 $\{x_n\}$ は区間 $[a,b]$ に含まれているので有界である．よって，Bolzano–Weierstrass の定理より，部分列 $\{x_{n_k}\}$ とその収束先 $c\in[a,b]$ が存在して，

$$x_{n_k}\to c\quad(k\to+\infty).$$

一方，f は連続なので，

$$y_{n_k}=f(x_{n_k})\to f(c)\quad(k\to+\infty).$$

しかし，先程の条件より

$$|y_{n_k}|>n_k$$

であり，$k\to+\infty$ のとき n_k が発散することから矛盾する．□

(2) f は最大値をもつ．つまり，${}^{\exists}c\in[a,b]$ s.t.

$${}^{\forall}x\in[a,b],\quad f(x)\le f(c).$$

証明　(1) より $A:=f([a,b])$ は有界であるので，$\sup A$ が存在する．そこで $a_0:=\sup A$ とおく．最小上界の定義より，${}^{\forall}n\in\mathbb{N}$, ${}^{\exists}a_n\in A$ s.t.

$$a_0-\frac{1}{n}<a_n,\quad \text{つまり}\quad -\frac{1}{n}<a_n-a_0.$$

一方，最小上界は上界の 1 つなので

$${}^{\forall}n\in\mathbb{N},\quad a_n\le a_0,\quad \text{つまり}\quad a_n-a_0\le 0<\frac{1}{n}.$$

が成立する．これらを合わせれば

$$|a_n-a_0|<\frac{1}{n}$$

より，$a_n\to a_0$ が分かる．ここで，像の定義より，${}^{\exists}x_n\in[a,b]$ s.t.

$$a_n=f(x_n)$$

数列 $\{x_n\}$ は区間 $[a,b]$ に含まれているので有界である．よって，Bolzano–Weierstrass の定理より，部分列 $\{x_{n_k}\}$ とその収束先 $c\in[a,b]$ が存在して，

$$x_{n_k}\to c\quad(k\to+\infty).$$

一方, f は連続なので,

$$a_{n_k} = f(x_{n_k}) \to f(c) \quad (k \to +\infty).$$

しかし, 先程の条件より収束先は 1 つなので

$$a_0 = f(c)$$

である. a_0 は $A = f([a, b])$ の最小上界と置いたので, 上界の 1 つである. よって

$$^\forall x \in [a, b], \quad f(x) \le f(c).$$

$\square$