2026/06/12/No.8

微積分及び演習I・自習シート

問 1 X, Y を集合とし, $f : X \to Y$ とする. 次を証明せよ. ただし, I は添え字の集合である.

(1) $B \subset Y$ ならば

$$f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$$

解答例 $(\subset)$ を示す. $x \in f^{-1}(Y \setminus B)$ とする. 逆像の定義より $x \in X$ かつ $f(x) \in Y \setminus B$ である. つまり, 差の定義より $f(x) \in Y$ かつ $f(x) \notin B$ である. このとき, 逆像の定義より $x \notin f^{-1}(B)$ である. よって,

$$x \in X \setminus f^{-1}(B)$$

を得る. よって $(\subset)$ が成立.

$(\supset)$ を示す. $x \in X \setminus f^{-1}(B)$ とする. 差の定義より $x \in X$ かつ $x \notin f^{-1}(B)$ である. このとき, 逆像の定義より $f(x) \notin B$ である. 写像の定義から $f(x) \in Y$ なので,

$$f(x) \in Y \setminus B$$

つまり, 逆像の定義より

$$x \in f^{-1}(Y \setminus B)$$

を得る. よって $(\supset)$ が成立.

以上により, 等号が成立. □

(2) $B_\alpha \subset Y$ ならば

$$f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in I} f^{-1}(B_\alpha)$$

解答例 $(\subset)$ を示す. $x \in f^{-1}(\bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha)$ とする. 逆像の定義より, ($x \in X$ かつ) $f(x) \in \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha$ である. さらに, 和集合の定義より ${}^\exists \alpha_x \in I$ s.t.

$$f(x) \in B_{\alpha_x}$$

つまり, 逆像の定義より $x \in f^{-1}(B_{\alpha_x})$. ゆえに和集合の定義より

$$x \in \bigcup_{\alpha \in I} f^{-1}(B_\alpha)$$

を得る. よって $(\subset)$ が成立.

$(\supset)$ を示す. $x \in \bigcup_{\alpha \in I} f^{-1}(B_\alpha)$ とする. 和集合の定義より, ${}^\exists \alpha_x \in I$ s.t.

$$x \in f^{-1}(B_{\alpha_x})$$

つまり, 逆像の定義より

$$f(x) \in B_{\alpha_x}$$

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと. 提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.

再び和集合の定義より $f(x) \in \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha$ である. ゆえに逆像の定義より

$$x \in f^{-1}(\bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha)$$

を得る. よって $(\supset)$ が成立.

以上により, 等号が成立. $\square$

(3) $A_\alpha \subset X$ ならば

$$f\left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in I} f(A_\alpha)$$

解答例 $(\subset)$ を示す. $y \in f(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha)$ とする. 像の定義より, ${}^\exists x \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ s.t. $y = f(x)$ である. ここで, 和集合の定義より ${}^\exists \alpha_0 \in I$ s.t.

$$x \in A_{\alpha_0}$$

つまり, 像の定義より $y \in f(A_{\alpha_0})$. ゆえに和集合の定義より

$$y \in \bigcup_{\alpha \in I} f(A_\alpha)$$

を得る. よって $(\subset)$ が成立.

$(\supset)$ を示す. $y \in \bigcup_{\alpha \in I} f(A_\alpha)$ とする. 和集合の定義より ${}^\exists \alpha_0 \in I$ s.t.

$$y \in f(A_{\alpha_0})$$

ここで, 像の定義より ${}^\exists x \in A_{\alpha_0}$ s.t. $y = f(x)$ である. この x について

$$x \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$$

なので, 像の定義より

$$y \in f\left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right)$$

を得る. よって $(\supset)$ が成立.

以上により, 等号が成立. $\square$

(4) $A_\alpha \subset X$ ならば

$$f\left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\right) \subset \bigcap_{\alpha \in I} f(A_\alpha)$$

解答例 $y \in f\left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\right)$ とする. 像の定義より ${}^\exists x \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ s.t. $y = f(x)$. この x について共通部分の定義より

$${}^\forall \alpha \in I, \quad x \in A_\alpha$$

つまり, 像の定義より

$${}^\forall \alpha \in I, \quad y \in f(A_\alpha)$$

となり, 共通部分の定義より

$$y \in \bigcap_{\alpha \in I} f(A_\alpha)$$

を得る. よって成立. $\square$

問 2 問 1 の (4) の逆向きの包含関係は一般には成立しない. その例を見つける. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) = x^2$ とする.

$$f(A_1 \cap A_2) \not\supset f(A_1) \cap f(A_2)$$

となるような A_1 と A_2 の例を見つけよ.

解答例　例えば $A_1 := (-2, 1)$, $A_2 := (-1, 3)$ とすると

$$f(A_1) = [0, 4), \quad f(A_2) = [0, 9)$$

よって

$$f(A_1) \cap f(A_2) = [0, 4)$$

である. 一方, $A_1 \cap A_2 = (-1, 1)$ であるので

$$f(A_1 \cap A_2) = [0, 1)$$

となる. ゆえに, $f(A_1 \cap A_2) \supset f(A_1) \cap f(A_2)$ は成立していない. $\square$

問 3 $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ とし, 行列を用いて $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

で定義する [1]. ただし, ここでは $\mathbb{R}^2$ の元 $\boldsymbol{x}$ を

$$\boldsymbol{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

のように縦に並べてかくことにする [2]. このとき, $ad - bc \neq 0$ ならば f が全単射であることを証明せよ.

解答例　まず全射について考える. $f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$ を示せばよい. 必ず $f(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^2$ は成立するので, $f(\mathbb{R}^2) \supset \mathbb{R}^2$ を示せばよい. $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^2$ とする. $\boldsymbol{y} \in f(\mathbb{R}^2)$ を示せばよい, つまり ${}^\exists \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ s.t. $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$ を示せばよい.

$$\boldsymbol{y} := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

とおくと, それは

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 &= y_1, \\ cx_1 + dx_2 &= y_2 \end{cases}$$

---

[1]

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ とは } \begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 \\ cx_1 + dx_2 \end{pmatrix} \text{ のこと.}$$

[2] つまり, $(x_1, x_2)^\mathsf{T}$ のこと.

を満たすかどうか, つまり連立方程式が解けるかどうかと同値である. 上を d 倍, 下を b 倍して

$$\begin{cases} adx_1 + bdx_2 &= dy_1, \\ bcx_1 + bdx_2 &= by_2, \end{cases}$$

より消去法によって

$$(ad - bc)x_1 = dy_1 - by_2$$

を得る. ここで, $ad - bc \neq 0$ より両辺をわって,

$$x_1 = \frac{1}{ad - bc}(dy_1 - by_2),$$

また, 上に代入して

$$\frac{a}{ad - bc}(dy_1 - by_2) + bx_2 = y_1,$$

$$bx_2 = \frac{ad - bc}{ad - bc}y_1 - \frac{a}{ad - bc}(dy_1 - by_2) = \frac{-bc}{ad - bc}y_1 + \frac{ab}{ad - bc}y_2,$$

$$x_2 = \frac{1}{ad - bc}(-cy_1 + ay_2)$$

を得る. つまり $^{\exists}\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ s.t. $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$ が示された. すなわち $ad - bc \neq 0$ ならば f は全射であることが分かる.

次に単射について考える.

$$\boldsymbol{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{x}} := \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix},$$

とおく. 単射の定義の対偶から

$$f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 \\ cx_1 + dx_2 \end{pmatrix}, \quad f(\tilde{\boldsymbol{x}}) = \begin{pmatrix} a\tilde{x}_1 + b\tilde{x}_2 \\ c\tilde{x}_1 + d\tilde{x}_2 \end{pmatrix}$$

に対して, $f(\boldsymbol{x}) = f(\tilde{\boldsymbol{x}})$ ならば $\boldsymbol{x} = \tilde{\boldsymbol{x}}$ を示せばよい. $f(\boldsymbol{x}) = f(\tilde{\boldsymbol{x}})$ とすると

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 &= a\tilde{x}_1 + b\tilde{x}_2, \\ cx_1 + dx_2 &= c\tilde{x}_1 + d\tilde{x}_2. \end{cases}$$

上を d 倍, 下を b 倍して

$$\begin{cases} adx_1 + bdx_2 &= ad\tilde{x}_1 + bd\tilde{x}_2, \\ bcx_1 + bdx_2 &= bc\tilde{x}_1 + bd\tilde{x}_2, \end{cases}$$

より消去法によって

$$(ad - bc)x_1 = (ad - bc)y_1$$

を得る. ここで, $ad - bc \neq 0$ より両辺をわって,

$$x_1 = \tilde{x}_1$$

を得る. 次にこれを上に代入すれば $b \neq 0$ のときに $x_2 = \tilde{x}_2$ が得られ, 下に代入すれば $d \neq 0$ のときに $x_2 = \tilde{x}_2$ を得る. つまり $b \neq 0$ もしくは $d \neq 0$ のどちらかが仮定されていれば $x_2 = \tilde{x}_2$ が得られることになるが, $b = d = 0$, つまりそのどちらも成立しないときは $ad - bc \neq 0$ を満たさなくなるので, これらの仮定は全て $ad - bc \neq 0$ の仮定でまとめられる. すなわち, $ad - bc \neq 0$ ならば f は単射であることが分かる.

別解　線形代数の知識を使えばこの証明で何をしているのか意味が分かりやすい. 実際,

$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

とおくと, $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ を意味し, $ad - bc \neq 0$ の条件から A は正則行列すなわち $A^{-1}A = AA^{-1} = I$(単位行列) を満たす行列 A^{-1} が存在することを学んだ. また A^{-1} は

$$\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

で得られることを学んでいるに違いない. 上記解答例に合わせて議論していくと, 任意の $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^2$ に対して, $\boldsymbol{y} \in f(\mathbb{R}^2)$, つまりある $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ が存在して $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$ となるかどうかを考える. $A^{-1}A = I$ であったことに注意して

$$A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\boldsymbol{y}$$

の左から A^{-1} をかければ

$$A^{-1}A\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{y},$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

を得る. すなわち $ad - bc \neq 0$ ならば f は全射であることが分かる. 単射についても $f(\boldsymbol{x}) = f(\tilde{\boldsymbol{x}})$ ならば $\boldsymbol{x} = \tilde{\boldsymbol{x}}$ を示せばよいが, $A\boldsymbol{x} = A\tilde{\boldsymbol{x}}$ の両辺に A^{-1} を写像としてかければ $\boldsymbol{x} = \tilde{\boldsymbol{x}}$ を得る. すなわち, $ad - bc \neq 0$ ならば f は単射であることが分かる.

なお、線形代数で行列 A の逆行列が存在するための必要十分条件をどのような形で証明していたかによっては, 上記の議論が循環論法になってしまうので注意が必要である.

問 4 $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ とし, さらに $h : X \to Z$ を

$$h(x) := g(f(x)) \quad (x \in X)$$

と定義する (合成写像). (1) と (2) を証明せよ.

(1) h が単射であれば, f も単射である.

解答例　背理法で示す. もし f が単射でないならば ${}^{\exists}x_1, x_2 \in X$ s.t.

$$x_1 \neq x_2 \quad \text{かつ} \quad f(x_1) = f(x_2).$$

このとき, $g : Y \to Z$ は写像なので $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ を満たす, つまり

$$h(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = h(x_2)$$

となり, h が単射であることに矛盾する. よって f は単射である. □

(2) h が全射であれば, g も全射である.

解答例　$g(Y) = Z$, すなわち, $g(Y) \subset Z$ かつ $g(Y) \supset Z$ を示せばよい. 像の定義から $g(Y) \subset Z$ は常に成り立つ. 次に $g(Y) \supset Z$ を示す. $z \in Z$ とする. このとき ${}^{\exists}y \in Y$ s.t.

$$z = g(y)$$

であることを示せばよい. $z \in Z$ とすると, h が全射より ${}^{\exists}x \in X$ s.t.

$$z = h(x).$$

このとき, $f : X \to Y$ より $y = f(x)$ とおくと $y \in Y$ を満たす, つまり

$$z = h(x) = g(f(x)) = g(y)$$

となり, $g(Y) \supset Z$ が証明できたので, $g(Y) = Z$, すなわち g は全射である. $\square$