2026/05/22/No.7

微積分及び演習 I・自習シート

問 1　数列 $\{a_n\}$ の一般項を

$$a_n := 2n$$

とおく. $\{a_n\}$ の部分列 $\{a_{n_k}\}$ として

$$^\forall k \in \mathbb{N}, \quad n_k := 3k$$

で定める. n_1, n_2, n_9 と a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_9} の値をそれぞれ求めよ.

解答例　$n_1 = 3 \times 1 = 3$, $n_2 = 3 \times 2 = 6$, $n_9 = 3 \times 9 = 81$.

$$\begin{array}{cccccccccccccc}
a_n & : & 2, & 4, & 6, & 8, & 10, & 12, & 14, & 16, & 18, & 20, & \dots & , 2n, \\
 & & & & a_{n_1} & & & a_{n_2} & & & a_{n_3} & & & \\
a_{n_k} & : & & & 6, & & & 12, & & & 18, & & \dots &
\end{array}$$

$a_n = 2n$ の n として $n_k = 3k$ を代入すると $a_{n_k} := 2 \cdot 3k = 6k$. よって, $a_{n_1} = 6$, $a_{n_2} = 12$, $a_{n_9} = 54$.

問 2　例題を参考に, 一般項が与えられた数列 $\{a_n\}$ に対して, n_k を次のように定めたとき, 次の数列 $\{a_n\}$ の部分列 $\{a_{n_k}\}$ について初項から第 5 項までを列挙せよ.

例題　一般項が $a_n := 3n + 1$ で与えられる数列

$$\begin{array}{ccccccccccc}
a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & a_5, & a_6, & a_7, & a_8, & a_9, & a_{10}, & \dots \\
4, & 7, & 10, & 13, & 16, & 19, & 22, & 25, & 28, & 31, & \dots
\end{array}$$

に対して $n_k := 2k$ で定義される部分列 $\{a_{n_k}\}$ は

$$\text{第 1 項} \quad a_{n_1} = a_2 = 3 \cdot 2 + 1 = 7,$$

$$\text{第 2 項} \quad a_{n_2} = a_4 = 3 \cdot 4 + 1 = 13,$$

$$\text{第 3 項} \quad a_{n_3} = a_6 = 3 \cdot 6 + 1 = 19,$$

$$\text{第 4 項} \quad a_{n_4} = a_8 = 3 \cdot 8 + 1 = 25,$$

$$\text{第 5 項} \quad a_{n_5} = a_{10} = 3 \cdot 10 + 1 = 31.$$

(1) 一般項が $a_n := 3n + 1$ で与えらる数列の, $n_k := 3k$ で定義される部分列 $\{a_{n_k}\}$.

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと. 提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.

解答例　一般項が $a_n := 3n+1$ で与えらる数列

$$\begin{array}{ccccccccccc} a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & a_5, & a_6, & a_7, & a_8, & a_9, & a_{10}, & \ldots \\ 4, & 7, & 10, & 13, & 16, & 19, & 22, & 25, & 28, & 31, & \ldots \end{array}$$

に対して $n_k := 2k$ で定義される部分列 $\{a_{n_k}\}$ は

$$\begin{aligned} \text{第 1 項} \quad & a_{n_1} = a_2 = 3 \cdot 2 + 1 = 7, \\ \text{第 2 項} \quad & a_{n_2} = a_4 = 3 \cdot 4 + 1 = 13, \\ \text{第 3 項} \quad & a_{n_3} = a_6 = 3 \cdot 6 + 1 = 19, \\ \text{第 4 項} \quad & a_{n_4} = a_8 = 3 \cdot 8 + 1 = 25, \\ \text{第 5 項} \quad & a_{n_5} = a_{10} = 3 \cdot 10 + 1 = 31. \end{aligned}$$

(2) 一般項が $a_n := (-1)^n + 1$ で与えらる数列の, $n_k : k$ 番目の素数 $(2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots)$ で定義される部分列 $\{a_{n_k}\}$.

解答例　一般項が $a_n := (-1)^n + 1$ で与えらる数列

$$\begin{array}{ccccccccccc} a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & a_5, & a_6, & a_7, & a_8, & a_9, & a_{10}, & \ldots \\ 0, & 2, & 0, & 2, & 0, & 2, & 0, & 2, & 0, & 2, & \ldots \end{array}$$

$n_k : k$ 番目の素数 $(2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots)$ で定義される部分列 $\{a_{n_k}\}$ は

$$\begin{aligned} \text{第 1 項} \quad & a_{n_1} = a_2 = (-1)^2 + 1 = 2, \\ \text{第 2 項} \quad & a_{n_2} = a_3 = (-1)^3 + 1 = 0, \\ \text{第 3 項} \quad & a_{n_3} = a_5 = (-1)^5 + 1 = 0, \\ \text{第 4 項} \quad & a_{n_4} = a_7 = (-1)^7 + 1 = 0, \\ \text{第 5 項} \quad & a_{n_5} = a_{11} = (-1)^{11} + 1 = 0. \end{aligned}$$

(3) 一般項が $a_n := 4n - 1$ で与えらる数列の, $n_k := k$ で定義される部分列 $\{a_{n_k}\}$.

解答例　一般項が $a_n := 4n - 1$ で与えらる数列

$$\begin{array}{ccccccccccc} a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & a_5, & a_6, & a_7, & a_8, & a_9, & a_{10}, & \ldots \\ 3, & 7, & 11, & 15, & 19, & 23, & 27, & 31, & 35, & 39, & \ldots \end{array}$$

に対して $n_k := k$ で定義される部分列 $\{a_{n_k}\}$ は

$$\begin{aligned} \text{第 1 項} \quad & a_{n_1} = a_1 = 4 \cdot 1 - 1 = 3, \\ \text{第 2 項} \quad & a_{n_2} = a_2 = 4 \cdot 2 - 1 = 7, \\ \text{第 3 項} \quad & a_{n_3} = a_3 = 4 \cdot 3 - 1 = 11, \\ \text{第 4 項} \quad & a_{n_4} = a_4 = 4 \cdot 4 - 1 = 15, \\ \text{第 5 項} \quad & a_{n_5} = a_5 = 4 \cdot 5 - 1 = 19. \end{aligned}$$

注: 数列 $\{a_n\}$ に対して $\{a_n\}$ 自身も $\{a_n\}$ の部分列の 1 つである.

問 3 数列 $\{S_n\}$ を

$$S_1 := 0.9, \quad S_2 := 0.99 = 0.09 + 0.9, \quad S_3 := 0.999 = 0.009 + 0.09 + 0.9,$$

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} 9 \times 10^{-k}$$

で定義する. 次の問いに答えよ.

(1) $\{S_n\}$ は上に有界な列であることを示せ.

解答例

$$S_1 = 0.9 = 1 - 0.1,$$

$$S_2 = 0.99 = 0.9 + 0.09 = (1 - 0.1) + (0.1 - 0.01) = 1 - 0.01,$$

$$S_3 = 0.999 = 0.9 + 0.09 + 0.009 = (1 - 0.1) + (0.1 - 0.01) + (0.01 - 0.001) = 1 - 0.001,$$

から帰納的に推論できるが, $9 \times 10^{-k} = 10^{-k} \times 9 = 10^{-k} \times (10 - 1) = 10^{-k+1} - 10^{-k}$ より

$$\begin{aligned} S_n &:= \sum_{k=1}^{n} 9 \times 10^{-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} (10^{-k+1} - 10^{-k}) \\ &= (1 - 10^{-1}) + (10^{-1} - 10^{-2}) + (10^{-2} - 10^{-3}) + \cdots + (10^{-n+1} - 10^{-n}) \\ &= 1 - 10^{-n} \end{aligned}$$

ゆえに

$$^\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 - S_n = 1 - (1 - 10^{-n}) = 10^{-n} > 0.$$

よって, $^\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n < 1$ より上に有界である. □

(2) $\{S_n\}$ は単調増加列であることを示せ.

解答例

$$S_2 - S_1 = 0.99 - 0.9 = 0.09,$$

$$S_3 - S_2 = 0.999 - 0.99 = 0.009,$$

から帰納的に推論できるが,

$$\begin{aligned} S_{n+1} - S_n &= \sum_{k=1}^{n+1} 9 \times 10^{-k} - S_n \\ &= \left(9 \times 10^{-(n+1)} + S_n\right) - S_n \\ &= 9 \times 10^{-(n+1)} > 0. \end{aligned}$$

よって, $^\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n < S_{n+1}$ より単調増加 (狭義単調増加) である. □

(3) $\{S_n\}$ は収束することを示せ.

解答例　(1),(2) より $\{S_n\}$ は上に有界かつ単調増加な数列なので収束する．　$\square$

(4)　(3) より $\{S_n\}$ は収束することが分かるので，その収束先を

$$0.999\cdots$$

もしくはより丁寧に

$$0.\dot{9}$$

と書くことにする．収束先 $0.\dot{9}$ は 1 であることを厳密に証明せよ，すなわち

$$0.999\cdots = 0.\dot{9} = 1$$

であることを「数列 S_n は 1 に収束することを ε-N 論法を用いて示す」ことで証明せよ．

目標

$^\forall\varepsilon > 0,\ ^\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t.

$$^\forall n \geq N_\varepsilon, \quad |S_n - 1| < \varepsilon$$

を示せばよい．

メモ (1) の計算より

$$|S_n - 1| = 1 - S_n = 10^{-n}$$

なので，

$$10^{-n} < \varepsilon$$

を満たす n を逆算すると

$$\log_{10} 10^{-n} < \log_{10}\varepsilon,$$

$$-n < \log_{10}\varepsilon,$$

$$n > -\log_{10}\varepsilon$$

であればよい (ちなみに $0 < \varepsilon < 1$ においては $\log_{10}\varepsilon < 0$ なので，$-\log_{10}\varepsilon > 0$)．

$\varepsilon > 0$ とする．アルキメデスの原理より，$^\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t.

$$-\log_{10}\varepsilon < N_\varepsilon, \quad \text{このとき，} \quad -N_\varepsilon < \log_{10}\varepsilon \quad \text{より} \quad 10^{-N_\varepsilon} < \varepsilon.$$

よって (1) より，$^\forall n \geq N_\varepsilon$,

$$\begin{aligned}
|S_n - 1| &= 1 - S_n \\
&= 10^{-n} \\
&= \frac{1}{10^n} \\
&\leq \frac{1}{10^{N_\varepsilon}} \\
&= 10^{-N_\varepsilon} \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

ゆえに S_n は 1 に収束する．　$\square$