2026/05/07/No.6

微積分及び演習 I・自習シート

問 1　$\{a_n\}$ を数列, $\alpha \in \mathbb{R}$ とする. $a_n \to \alpha$ $(n \to \infty)$ ならば

$$|a_n| \to |\alpha| \quad (n \to \infty)$$

を ε-N 論法で証明せよ [1]

解答例

> ${}^{\forall}\varepsilon > 0,\ {}^{\exists}N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t.
>
> $${}^{\forall}n \geq N_\varepsilon, \quad \big||a_n| - |\alpha|\big| < \varepsilon$$
>
> を示せばよい.

${}^{\varepsilon} > 0$ とする. 仮定より ${}^{\exists}N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t.

$${}^{\forall}n \geq N_\varepsilon, \quad |a_n - \alpha| < \varepsilon.$$

よって, このとき

$$\begin{aligned} \big||a_n| - |\alpha|\big| &\leq |a_n - \alpha| \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

よって成立. □

> 数列の極限は ε-N 論法によって定義されることを学んだ. また, 極限の概念として, 数列 $\{a_n\}$ の極限値 α とは, ある $n \in \mathbb{N}$ で到達できるかどうかは分からないが, 口語的に言えば「目標としている値」「ゴールとしている値」のようなものであることも学んだ. しかし, 数列が収束する場合, 到達するかどうか分からない値という状態で, 極限値は明確に 1 つに定まるのだろうか? 複数の値に近づいているということは起こりえないのだろうか?

問 2　数列 $\{a_n\}$ が収束するならば, 収束先は必ず 1 つに定まることを ε-N 論法で証明していく. 次の問いに答えよ.

(1) $\{a_n\}$ の収束先を $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ とおく. 数列 $\{a_n\}$ が α に収束することの定義を ε-N 論法でかけ. また, 数列 $\{a_n\}$ が β に収束することの定義を ε-N 論法でかけ.

解答例　数列 $\{a_n\}$ が α に収束することの定義は, 例えば ${}^{\forall}\varepsilon > 0,\ {}^{\exists}N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t.

$${}^{\forall}n \geq N_\varepsilon, \quad |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと. 提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.

[1] $r, s \in \mathbb{R}$, $\big||r| - |s|\big| \leq |r - s|$ を用いるとよい.

とかける. 数列 $\{a_n\}$ が β に収束することの定義は, 例えば $^\forall\varepsilon > 0$, $^\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t.

$$^\forall n \geq N_\varepsilon, \quad |a_n - \beta| < \varepsilon$$

とかける.

(2)

$$^\forall\varepsilon > 0, \quad |\alpha - \beta| < \varepsilon$$

であることを証明せよ.

解答例 収束先を $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ とおくと, 仮定より $^\forall\varepsilon > 0$, $^\exists N_\alpha, N_\beta \in \mathbb{N}$ s.t.

$$^\forall n \geq N_\alpha, \quad |a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2},$$
$$^\forall n \geq N_\beta, \quad |a_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

((1) では同じ $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ という文字で自然数を表したが, この問いでは同時に収束の状態を 2 つ表現するため, 別の文字 N_α と N_β を用いた). そこで, $N_\varepsilon := \max\{N_\alpha, N_\beta\}$ とおくと,

$$^\forall n \geq N_\varepsilon, \quad |a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |a_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

もちろん, $n := N_\varepsilon$ でも成立するので

$$|a_{N_\varepsilon} - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |a_{N_\varepsilon} - \beta| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

よって

$$\begin{aligned} |\alpha - \beta| &= |\alpha - a_{N_\varepsilon} + a_{N_\varepsilon} - \beta| \\ &\leq |\alpha - a_{N_\varepsilon}| + |a_{N_\varepsilon} - \beta| \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

(3) 一般に数列が収束するとき, 収束先は必ず 1 つに定まることを証明せよ.

解答例 (2) より $\varepsilon > 0$ の任意性から

$$|\alpha - \beta| \leq 0,$$

つまり, $\alpha = \beta$. よって, 一般に数列が収束するとき, 収束先は必ず 1 つに定まる. □

問 3 $\{a_n\}$ を有界な数列とし, $n \in \mathbb{N}$ に対して集合 $S_n \subset \mathbb{R}$ を

$$S_n := \{a_k \in \mathbb{R} : k \geq n\}$$

とおく, すなわち

$$S_1 = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}, \quad S_2 = \{a_2, a_3, a_4, \ldots\}, \quad S_3 = \{a_3, a_4, a_5, \ldots\}.$$

次に, 各 S_n の最小上界, 最大下界を使って数列 $\{\overline{a}_n\}$, $\{\underline{a}_n\}$ を次のように定義する:

$$\overline{a}_n := \sup S_n, \quad \underline{a}_n := \inf S_n.$$

このとき, $\{\overline{a}_n\}$ は単調減少列, $\{\underline{a}_n\}$ は単調増加列であることをそれぞれ証明せよ [2).]

---

2) 数列 $\{b_n\}$ が単調増加列であるとは,

$$^\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n \leq b_{n+1}$$

によって定義される. 単調減少列も同様に定義される

解答例　$n \in \mathbb{N}$ とする. S_n と S_{n+1} に対して, $S_{n+1} \subset S_n$ より

$$\sup S_{n+1} \leq \sup S_n, \quad \inf S_{n+1} \geq \inf S_n,$$

すなわち

$$^\forall n \in \mathbb{N}, \quad \overline{a}_{n+1} \leq \overline{a}_n, \quad \underline{a}_n \leq \underline{a}_{n+1}.$$

以上により $\{\overline{a}_n\}$ は単調減少列であり $\{\underline{a}_n\}$ は単調増加列である. $\square$

問 4　数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ と実数 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対して,

$$a_n \to \alpha, \quad b_n \to \beta \quad (n \to \infty)$$

とする. このとき

$$a_n b_n \to \alpha\beta \quad (n \to \infty)$$

を ε-N 論法で証明せよ ($\{a_n\}$ は収束列であるので有界であることに注意し, テキスト P.36 も参考にせよ. 必ずしもテキスト通りである必要はない).

解答例

$^\forall \varepsilon > 0$, $^\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t.

$$^\forall n \geq N_\varepsilon, \quad |a_n b_n - \alpha\beta| < \varepsilon$$

を示せばよい.

$\{a_n\}$ は収束列であるので有界である. すなわち, $^\exists M > 0$ s.t.

$$^\forall n \in \mathbb{N}, \quad |a_n| \leq M$$

であることに注意する. $\varepsilon > 0$ とする. 仮定より $^\exists N_a, N_b \in \mathbb{N}$ s.t.

$$^\forall n \geq N_a, \quad |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2(1+|b|)},$$

$$^\forall n \geq N_b, \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

(テキストでは $\varepsilon/(2(1+|b|))$ の部分も $\varepsilon/2M$ で評価している). そこで, $N_\varepsilon := \max\{N_a, N_b\}$ とおくと

$$^\forall n \geq N_\varepsilon, \quad |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2(1+|b|)}, \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

となるので, このとき

$$\begin{aligned}
|a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \\
&\leq |a_n b_n - a_n b| + |a_n b - ab| \\
&= |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a| \\
&\leq M|b_n - b| + (1+|b|)|a_n - a| \\
&< M\frac{\varepsilon}{2M} + (1+|b|)\frac{\varepsilon}{2(1+|b|)} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

以上により

$$a_nb_n \to ab \quad (n \to \infty).$$

□

注

$$\begin{aligned} |a_nb_n - ab| &= |a_nb_n - a_nb + a_nb - ab| \\ &\leq |a_nb_n - a_nb| + |a_nb - ab| \\ &= |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a| \end{aligned}$$

の式変形から予想して, 仮定より $^{\exists}N_a, N_b \in \mathbb{N}$ s.t.

$$^{\forall}n \geq N_a, \quad |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2(1+|b|)},$$

$$^{\forall}n \geq N_b, \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2(1+|a_n|)}$$

とすればよさそうな気がするが (講義で話したとおり $+1$ は分母が 0 にならないための工夫)

$$\frac{\varepsilon}{2(1+|a_n|)}$$

が n に依存しているのでよくない. 実際, a_n が a に収束することの定義は, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して (最初に決まる), ある $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ が存在して (それに応じて決まる)

$$^{\forall}n \geq N_\varepsilon, \quad |a_n - a| < \varepsilon$$

であったが, これは「どんな半径 ε を選んでもある番号が存在してその番号以降では数列 a_n と収束先 a の距離が ε 未満となる」であった. 半径 $\varepsilon/2(1+|a_n|)$ が番号 n によらず定まっていてはじめて収束の定義が使える.

$$\begin{aligned} |a_nb_n - ab| &= |a_nb_n - ab_n + ab_n - ab| \\ &\leq |a_nb_n - ab_n| + |ab_n - ab| \\ &= |a_n - a||b_n| + |a||b_n - b| \end{aligned}$$

と変形しても同じことである. だから収束列は有界列であることから n に依存しない正定数 M を持ち出している.