微積分及び演習I・自習シート

問 1　$E_1, E_2 \subset \mathbb{R}$ をそれぞれ空でない上に有界な集合とする．また

$$E := \{x + y \in \mathbb{R} : x \in E_1, y \in E_2\}$$

とおく．このとき，

$$\sup E \geq \sup E_1 + \sup E_2$$

を証明せよ．

解答例　$\alpha := \sup E_1$, $\beta := \sup E_2$ とおく．$\varepsilon > 0$ とする．sup の定義より ${}^\exists x_\varepsilon \in E_1$, ${}^\exists y_\varepsilon \in E_2$ s.t.

$$\alpha - \frac{\varepsilon}{2} < x_\varepsilon, \quad \beta - \frac{\varepsilon}{2} < y_\varepsilon$$

を満たす．よって両辺加えると

$$\alpha + \beta - \varepsilon < x_\varepsilon + y_\varepsilon.$$

また，$x_\varepsilon + y_\varepsilon \in E$ に注意すれば sup の定義より $x_\varepsilon + y_\varepsilon \leq \sup E$．ゆえに

$$\alpha + \beta < \sup E + \varepsilon.$$

ここで $\varepsilon > 0$ の任意性から

$$\sup E \leq \alpha + \beta = \sup E_1 + \sup E_2$$

が成立する．□

注: 講義で学んだことなども含めると，このように定義される E に対しては，

$$\sup E \leq \sup E_1 + \sup E_2, \quad \sup E \geq \sup E_1 + \sup E_2,$$

$$\inf E \geq \inf E_1 + \inf E_2, \quad \inf E \leq \inf E_1 + \inf E_2$$

のいずれも成立するので，それぞれ等号

$$\sup E = \sup E_1 + \sup E_2, \quad \inf E = \inf E_1 + \inf E_2,$$

が成立する．

提出する場合は，解答例を参考にして自分で採点をしておくこと．提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です．

問 2　数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ をそれぞれ

$$a_n : 0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots$$
$$b_n : 0, -1, 0, -1, 0, -1, \ldots$$

とおく. 次の問いに答えよ.

(1) 数列 $\{a_n\}$ を集合 $E_1 := \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ とみると,

$$E_1 = \{0, 1\}$$

である [1]. 数列 $\{b_n\}$ を集合 $E_2 := \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ と見たとき, E_2 を元を列挙する形で求めよ.

解答例　$E_2 = \{-1, 0\}$. (もちろん $\{0, -1\}$ と書いてもよい.)

(2) 数列の sup を

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} a_n := \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

で定義する. つまり, 数列を集合とみた最小上界と定義する. このとき,

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} (a_n + b_n) < \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n + \sup_{n \in \mathbb{N}} b_n$$

であることを示せ.

解答例　まず

$$E_1 = \{a_n : n \in \mathbb{N}\} = \{0, 1\}, \quad E_2 = \{b_n : n \in \mathbb{N}\} = \{0, -1\}$$

より

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} a_n = \sup E_1 = 1, \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} b_n = \sup E_2 = 0.$$

一方, ${}^\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n + b_n = 0$ に注意すると

$$\{a_n + b_n : n \in \mathbb{N}\} = \{0\}$$

より

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} (a_n + b_n) = \sup\{0\} = 0$$

よって

$$0 = \sup_{n \in \mathbb{N}} (a_n + b_n) < 1 = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n + \sup_{n \in \mathbb{N}} b_n$$

を得る. □

---

[1] 数列には順番があり, 例えば, 一般項が $a_n := n$ で定義される数列

$$a_n : 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

において第 2 項と第 3 項を入れ換えた

$$b_n : 1, 3, 2, 4, 5, \ldots$$

とは別の数列と見なす. しかし集合と見なす場合には, 順番は関係なく $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, $\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ どちらも

$$\{1, 2, 3, 4, 5, \cdots\}$$

である.

注意: 問 1 の場合のように $E = E_1 + E_2$ と定義される場合とは異なることに注意する．実際, $E_1 := \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, $E_2 := \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ とおくと, 例えば, $a_1 + b_2$ は $\{a_n + b_n : n \in \mathbb{N}\}$ には含まれないが, $E = E_1 + E_2$ には含まれる．つまり, 問 1 で定義される E と $\{a_n + b_n : n \in \mathbb{N}\}$ は一致せず

$$\{a_n + b_n : n \in \mathbb{N}\} \subset E := E_1 + E_2 = \{a_n + b_m : n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}\}.$$

このように数列について, $\sup_{n\in\mathbb{N}}(a_n + b_n)$ は $\sup E$ とは意味が違うので

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}(a_n + b_n) \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n + \sup_{n\in\mathbb{N}} b_n,$$

$$\inf_{n\in\mathbb{N}}(a_n + b_n) \geq \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n + \inf_{n\in\mathbb{N}} b_n$$

のみが成立する．

問 3　$E \subset \mathbb{R}$ を空でない部分集合とする．$\alpha \in \mathbb{R}$ が

$$\alpha \in E \quad \text{かつ} \quad {}^\forall x \in E, \alpha \leq x$$

を満たすとき α を E の最小値とよび $\min E$ とかく．E の最小値が存在するならば

$$\min E = \inf E$$

であることを証明せよ．

解答例　仮定より E は下に有界なので $\inf E \in \mathbb{R}$ が存在する．そこで $\alpha := \min E$, $\beta := \inf E$ とおき, $\alpha = \beta$ を示す．まず, inf の定義から

$${}^\forall x \in E, \beta \leq x.$$

ここで, min の定義から $\alpha \in E$ より

$$\beta \leq \alpha.$$

次に, min の定義から α は E の下界の 1 つである．一方 β は E の最大下界であるので

$$\alpha \leq \beta.$$

ゆえに $\alpha = \beta$.　□

別解　$\alpha \leq \beta$ の証明について, inf の定義より, ${}^\forall \varepsilon > 0$, ${}^\exists x_\varepsilon \in E$ s.t.

$$\beta + \varepsilon > x_\varepsilon.$$

ここで, α は E の最小値なので

$$\beta + \varepsilon > x_\varepsilon \geq \alpha,$$

すなわち,

$$\alpha < \beta + \varepsilon.$$

$\varepsilon > 0$ の任意性より

$$\alpha \leq \beta$$

と示すこともできる．

問 4　一般項が次の様に与えられた数列 $\{a_n\}$ の 0 への収束を ε-N 論法で証明せよ.

(1) $a_n := \dfrac{1}{n^2}$

解答例

$^\forall\varepsilon > 0,\ ^\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t.

$$^\forall n \geq N_\varepsilon, \quad \left|\frac{1}{n^2} - 0\right| < \varepsilon$$

を示せばよい. そこで先に

$$\left|\frac{1}{n^2} - 0\right| = \frac{1}{n^2} < \varepsilon$$

となる番号を見積もっておくと, $n^2 \geq n$ より

$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

$$\frac{1}{\varepsilon} < n$$

となる番号であればよい.

$\varepsilon > 0$ とする. アルキメデスの原理より, $^\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t.

$$\frac{1}{\varepsilon} < N_\varepsilon.$$

このとき,

$$\frac{1}{N_\varepsilon} < \varepsilon.$$

よって, $^\forall n \geq N_\varepsilon$,

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{n^2} - 0\right| &= \frac{1}{n^2} \\ &\leq \frac{1}{n} \\ &\leq \frac{1}{N_\varepsilon} \\ &< \varepsilon.\end{aligned}$$

以上より

$$a_n \to 0 \quad (n \to +\infty).$$

別解

$^\forall\varepsilon > 0$, $^\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t.

$$^\forall n \geq N_\varepsilon, \quad \left|\frac{1}{n^2} - 0\right| < \varepsilon$$

を示せばよい. そこで先に

$$\left|\frac{1}{n^2} - 0\right| = \frac{1}{n^2} < \varepsilon$$

となる番号を見積もっておくと,

$$\frac{1}{\varepsilon} < n^2, \quad \text{つまり}, \quad \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} < n$$

となる番号であればよい.

$\varepsilon > 0$ とする. アルキメデスの原理より, $^\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t.

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} < N_\varepsilon.$$

このとき,

$$\frac{1}{N_\varepsilon^2} < \varepsilon.$$

よって, $^\forall n \geq N_\varepsilon$,

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{n^2} - 0\right| &= \frac{1}{n^2} \\ &\leq \frac{1}{N_\varepsilon^2} \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

以上より

$$a_n \to 0 \quad (n \to +\infty).$$

(2) $a_n := (-1)^n \dfrac{1}{n}$

解答例

$^\forall \varepsilon > 0$, $^\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t.

$$^\forall n \geq N_\varepsilon, \quad \left| (-1)^n \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon$$

を示せばよい. そこで先に

$$\left| (-1)^n \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon$$

となる番号を見積もっておくと

$$\begin{aligned} \left| (-1)^n \frac{1}{n} - 0 \right| &= \frac{1}{n} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

となる番号であればよい.

$\varepsilon > 0$ とする. アルキメデスの原理より, $^\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t.

$$\frac{1}{\varepsilon} < N_\varepsilon.$$

このとき,

$$\frac{1}{N_\varepsilon} < \varepsilon.$$

よって, $^\forall n \geq N_\varepsilon$,

$$\begin{aligned} \left| (-1)^n \frac{1}{n} - 0 \right| &= \frac{1}{n} \\ &\leq \frac{1}{N_\varepsilon} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

以上より

$$a_n \to 0 \quad (n \to +\infty).$$

(3) $a_n := \dfrac{1}{n}\sin n$

解答例

$^{\forall}\varepsilon > 0,\ ^{\exists}N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t.

$$^{\forall}n \geq N_\varepsilon, \quad \left|\frac{1}{n}\sin n - 0\right| < \varepsilon$$

を示せばよい. そこで先に

$$\left|\frac{1}{n}\sin n - 0\right| < \varepsilon$$

となる番号を見積もっておくと, $^{\forall}n \in \mathbb{N}\ |\sin n| \leq 1$ より

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{n}\sin n - 0\right| &= \frac{1}{n}|\sin n| \\ &< \frac{1}{n} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

となる番号であればよい.

$\varepsilon > 0$ とする. アルキメデスの原理より, $^{\exists}N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t.

$$\frac{1}{\varepsilon} < N_\varepsilon.$$

このとき, $^{\forall}n \geq N_\varepsilon$,

$$\frac{1}{\varepsilon} < N_\varepsilon \leq n$$

より

$$\frac{1}{n} < \varepsilon.$$

よって,

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{n}\sin n - 0\right| &= \frac{1}{n}|\sin n| \\ &< \frac{1}{n} \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

以上により

$$a_n \to 0 \quad (n \to +\infty).$$

問 5　次の集合の等号を証明せよ.

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right] = [0, 1)$$

解答例　$(\subset)$ を示す．$x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [0, 1-1/n]$ とする．和集合の定義より ${}^{\exists}n_x \in \mathbb{N}$ s.t.

$$x \in \left[0, 1 - \frac{1}{n_x}\right]$$

すなわち, $0 \le x \le 1 - 1/n_x$. ここで,

$$0 \le x \le 1 - \frac{1}{n_x} < 1$$

より

$$x \in [0, 1).$$

ゆえに $(\subset)$ が成立.

$(\supset)$ を示す．$x \in [0, 1)$ とする．すなわち, $0 \le x < 1$. $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [0, 1-1/n]$ を背理法で示す．もしそうでないなら

$$\neg \boxed{\exists n \in \mathbb{N} \boxed{x \in [0, 1 - \tfrac{1}{n}]}}$$

つまり

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \boxed{x \notin [0, 1 - \tfrac{1}{n_0}]}}$$

これは, ${}^{\forall}n \in \mathbb{N}$,

$$x < 0 \text{ または } x > 1 - \frac{1}{n}$$

となるが, $x \in [0, 1)$ より,

$${}^{\forall}n \in \mathbb{N}, x > 1 - \frac{1}{n}$$

となる．このとき, $1 - x > 0$ に注意すると

$$\frac{1}{n} > 1 - x,$$

$$n < \frac{1}{1-x}.$$

つまり，$1/(1-x)$ は $\mathbb{N}$ の上界となり，アルキメデスの原理に矛盾する．ゆえに $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [0, 1-1/n]$ となり, $(\supset)$ が成立する.

以上より等号成立. □