2026/04/16/No.3

微積分及び演習 I・自習シート

問 1　a, b, c, d, e の 5 つの文字からなる次の集合を考える.

$$A_1 := \{a, b, c\}, \quad A_2 := \{a, b, d\}, \quad A_3 := \{a, b, d, e\}$$

(1) $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ について, その元をすべて列挙すれば

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \{a, b, c, d, e\}$$

となる. 同じように全ての元を列挙する方法で $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ を求めよ.

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{a, b\}$$

(2) $I := \{1, 2, 3\}$ とおくことで $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ は

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$$

とかくこともできる. 例を参考に, $x = b,\ c,\ d,\ e$ に対して,

$$x \in A_{\alpha_0}$$

となる $\alpha_0 \in I$ をそれぞれ**全て**求めよ.

(例) $x = a$ のとき, a は $A_1,\ A_2,\ A_3$ のどの集合にも属しているので $x \in A_{\alpha_0}$ となる α_0 は $\alpha_0 = 1, 2, 3$ の 3 つである.

(i) $x = b$ のとき, $x \in A_{\alpha_0}$ となる $\alpha_0 \in I$ は $\alpha_0 = 1, 2, 3$

(ii) $x = c$ のとき, $x \in A_{\alpha_0}$ となる $\alpha_0 \in I$ は $\alpha_0 = 1$

(iii) $x = d$ のとき, $x \in A_{\alpha_0}$ となる $\alpha_0 \in I$ は $\alpha_0 = 2, 3$

(iv) $x = e$ のとき, $x \in A_{\alpha_0}$ となる $\alpha_0 \in I$ は $\alpha_0 = 3$

問 2　実数の集合を $\mathbb{R}$ とかく. $E \subset \mathbb{R},\ a, b \in \mathbb{R}$ とする. 次の条件や命題の否定を論理記号で書け.

(1) $a < b$.

(2) $a \in \mathbb{R} \setminus E$.

(3) ${}^\forall x \in E,\ x \leq a$.

(4) ${}^\exists x_0 \in E$ s.t. $x_0 \geq b$.

(5) ${}^\exists k \in \mathbb{R}$ s.t. ${}^\forall x \in E,\ x \leq k$.

解答例　(1) $a \geq b$. (2) $a \in E$. (3) ${}^\exists x \in E$ s.t. $x > a$. (4)${}^\forall x \in E,\ x < b$. (5) ${}^\forall k \in \mathbb{R}, {}^\exists x \in E$ s.t. $x > k$.

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと. 提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.

解説 (2)「$a \in \mathbb{R}$ かつ $a \notin E$」の否定なので「$a \notin \mathbb{R}$ または $a \in E$」となるが $a \in \mathbb{R}$ は仮定されているので $a \in E$. (3)「任意の $x \in E$ に対して $x \le a$」の否定なので, ある $x \in E$ が存在して, それが反例となる. つまり ${}^{\exists}x \in E$ s.t. $x > a$. (4)「ある $x_0 \in E$ が存在して $x_0 \ge b$」の否定なので, 任意の $x \in E$ に対して $x \ge b$ を満たさないということ, つまり ${}^{\forall}x \in E, x < b$. ここで, ${}^{\forall}x_0 \in E, x_0 < b$ でもよいが, わざわざ x に添え字 0 をつける必要がない.

$$\sum_{k=1}^{n} k$$

という和の表記を

$$\sum_{k_0=1}^{n} k_0$$

と書いても間違いではないが 0 をつける必要がないことと同じ. (5)「ある $k \in \mathbb{R}$ が存在して, 任意の $x \in E$ に対して $x \le k$」の否定なので「任意の $k \in \mathbb{R}$ に対して, 『任意の $x \in E$ に対して $x \le k$』が成り立たない」つまり,「任意の $k \in \mathbb{R}$ に対して, 『ある $x \in E$ が存在して $x > k$』」.

注 (5) のように論理記号が複数ある場合の否定を求めるには,

$$\boxed{\exists k \in \mathbb{R}\ \boxed{\forall x \in E\ \boxed{x \le k}}}$$

と本質だけ抽出してその否定,

$$\neg\ \boxed{\exists k \in \mathbb{R}\ \boxed{\forall x \in E\ \boxed{x \le k}}}$$

を

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{R}\ \boxed{\exists x \in E\ \boxed{x > k}}}$$

と論理記号の入れかえと最後の命題の否定によって求め, 必要に応じてあらためて ${}^{\forall}k \in \mathbb{R}$, ${}^{\exists}x \in E$ s.t. $x > k$ と機械的に得ることもできる. ここで「$\neg$」は否定を表す記号.

問 3[講義で扱った問題再掲] (ド・モルガンの法則) $\alpha \in I$ とし A_α を集合とする. 次の 2 つの性質が成立することを証明せよ.

(1)
$$\left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right)^c = \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^c.$$

(2)
$$\left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\right)^c = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha^c.$$

証明 (1) ($\subset$) を示す. $x \in \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right)^c$ とする. 補集合の定義より $x \notin \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$. つまり,

$${}^{\forall}\alpha \in I, \quad x \notin A_\alpha.$$

(実際, もしそうでなければ, $^{\exists}\alpha_0 \in I$ s.t. $x \in A_{\alpha_0}$ となるが, このとき $x \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ となり矛盾). ゆえに, $x \in A_\alpha^c$ が得られるので

$$x \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^c.$$

($\supset$) を示す. $x \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^c$ とする.

$$^{\forall}\alpha \in I, \quad x \in A_\alpha^c,$$

すなわち, $x \notin A_\alpha$. このとき,

$$x \notin \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$$

(実際, もしそうでなければ, $^{\exists}\alpha_0 \in I$ s.t. $x \in A_{\alpha_0}$ となるが矛盾). ゆえに補集合の定義より

$$x \in \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \right)^c.$$

以上より等号成立. □

(2) ($\subset$) を示す. $x \in \left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \right)^c$ とする. 補集合の定義より $x \notin \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$. つまり, $^{\exists}\alpha_0 \in I$ s.t.

$$x \notin A_{\alpha_0}$$

(実際, もしそうでなければ, $^{\forall}\alpha \in I$, $x \in A_\alpha$ となるが, このとき $x \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ となり矛盾). ゆえに,

$$x \in A_{\alpha_0}^c$$

が得られるので, 和集合の定義より

$$x \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha^c.$$

($\supset$) を示す. $x \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha^c$ とする. 和集合の定義より $^{\exists}\alpha_0 \in I$ s.t.

$$x \in A_{\alpha_0}^c,$$

すなわち

$$x \notin A_{\alpha_0}.$$

このとき,

$$x \notin \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$$

(実際, もしそうでなければ, $^{\forall}\alpha \in I$, $x \in A_\alpha$ となるが, $x \notin A_{\alpha_0}$ に矛盾). ゆえに補集合の定義より

$$x \in \left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \right)^c.$$

以上より等号成立. □

問 4　X を全体集合とし, $A, B \subset X$, $A, B \neq \emptyset$ とする. 次の 3 条件は同値 [1]であることを示せ.

[1]「(1) ならば (2)」, 「(2) ならば (3)」, 「(3) ならば (1)」を 3 つを示せばよい.

(1) $A^c \cup B = X$

(2) $A \subset B$

(3) $A \cap B^c = \emptyset$

証明　「(1) ならば (2)」を示す．(1) を仮定する．${}^\forall x \in A$, $x \in B$ を示す．$x \in A$ とする．$A \subset X$ より, $x \in X$ なので (1) を用いれば $x \in A^c \cup B$ となる．つまり $x \in A^c$ または $x \in B$. しかし, 今は $x \in A$ を仮定しているので $x \notin A^c$ より $x \in B$. ゆえに $A \subset B$.
「(2) ならば (3)」を示す．(2) を仮定する．背理法で示す．もしも $A \cap B^c \neq \emptyset$ ならば, $x \in A \cap B^c$ を取ることができる．この元 x は $x \in A$ かつ $x \in B^c$ を満たすが, $A \subset B$ より $x \in B$ かつ $x \in B^c$ となり矛盾．よって $A \cap B^c = \emptyset$.
「(3) ならば (1)」を示す.
$(\subset)$ を示す．$x \in A^c \cup B$ とする．$x \in A^c$ または $x \in B$ である.

(i) $x \in A^c$ のとき, $A^c = X \setminus A \subset X$ より, $x \in X$.

(ii) $x \in B$ のとき, $B \subset X$ より, $x \in X$.

以上より $x \in X$(もっと簡単に X は全体集合なので $x \in X$ となる, とまとめてしまってもよい)．よって $A^c \cup B \subset X$ が成立.
$(\supset)$ を示す．$x \in X$ とする.

(i) $x \in B$ のとき, 和集合の定義より $x \in A^c \cup B$ となる.

(ii) $x \notin B$ のとき, $x \in B^c$ であるが, さらに $x \notin A$ となる．実際, もしそうでないならば $x \in B^c$ かつ $x \in A$ となるが, 共通部分の定義より $x \in A \cap B^c$ となり, (3) に矛盾する．ゆえに $x \in A^c$ を得るので, 和集合の定義より $x \in A^c \cup B$ となる.

いずれの場合にも $x \in A^c \cup B$ となり, $A^c \cup B \supset X$ を得る.
以上により (1) の等号が成立する.

ゆえに 3 条件は同値となる.　□

「(3) ならば (1)」の別解　(3) を仮定する．ド・モルガンの法則より

$$(A \cap B^c)^c = A^c \cup B$$

であり, $\emptyset^c = X$ より (1) が成立.　□