微積分及び演習 I・自習シート

問 0[講義内の問題の復習] A, B, C を集合とする．次を証明せよ．

(1) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

(2) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

証明 (1) $(\subset)$ を示す．$x \in A \cap (B \cup C)$ とする．共通部分の定義より $x \in A$ かつ $x \in B \cup C$, すなわち $x \in B$ または $x \in C$ が成立する．

(i) $x \in B$ のとき, $x \in A$ かつ $x \in B$ であるので $x \in A \cap B$ である．ゆえに和集合の定義より

$$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

(ii) $x \in C$ のとき, $x \in A$ かつ $x \in C$ であるので $x \in A \cap C$ である．ゆえに和集合の定義より

$$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

(i), (ii) より $(\subset)$ が成立．

$(\supset)$ を示す．$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ とする．和集合の定義より $x \in A \cap B$ または $x \in A \cap C$ が成立する．

(i) $x \in A \cap B$ のとき, 共通部分の定義より $x \in A$ かつ $x \in B$, すなわち $x \in B \cup C$ である．ゆえに

$$x \in A \cap (B \cup C).$$

(ii) $x \in A \cap C$ のとき, 共通部分の定義より $x \in A$ かつ $x \in C$, すなわち $x \in B \cup C$ である．ゆえに

$$x \in A \cap (B \cup C).$$

(i), (ii) より $(\supset)$ が成立．

以上より, $(\subset)$ と $(\supset)$ が証明されたので等号が成立する． □

(2) $(\subset)$ を示す．$x \in A \cup (B \cup C)$ とする．和集合の定義より $x \in A$ または $x \in B \cap C$ が成立する．

(i) $x \in A$ のとき, $x \in A \cup B$ かつ $x \in A \cup C$ と言える．よって

$$x \in (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

(ii) $x \in B \cap C$ のとき, $x \in B$ かつ $x \in C$ であるので, $x \in A \cap B$ かつ $x \cup C$ と言える．よって

$$x \in (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

(i), (ii) より $(\subset)$ が成立．

$(\supset)$ を示す．$x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ とする．共通部分の定義より $x \in A \cup B$ かつ $x \in A \cup C$ が成立する．

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと．提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です．

解答例 1　和集合の定義よりこれは「$x \in A$ または $x \in B$」かつ「$x \in A$ または $x \in C$」を意味する．これらの組み合わせは以下の通り考えられる．

(i) $x \in A$ かつ $x \in A$ のとき，これは $x \in A$ を意味するので，$x \in A \cup (B \cap C)$ が得られる．

(ii) $x \in A$ かつ $x \in C$ のとき，$x \in A$ より，$x \in A \cup (B \cap C)$ が得られる．

(iii) $x \in B$ かつ $x \in A$ のとき，$x \in A$ より，$x \in A \cup (B \cap C)$ が得られる．

(ii) $x \in B$ かつ $x \in C$ のとき，共通部分の定義より $x \in B \cap C$ である．ゆえに $x \in A \cup (B \cap C)$ が得られる．

(i), (ii), (iii), (iv) より ($\supset$) が成立．
以上より，($\subset$) と ($\supset$) が証明されたので等号が成立する．　$\square$

解答例 2　$x \in A$ または $x \notin A$ で場合分けする．

(I) $x \in A$ のとき，$x \in A \cup (B \cap C)$ が得られる．

(II) $x \notin A$ のとき，$x \in B$ が得られる（もしそうでないなら，$x \neq B$ だが，$x \notin A$ かつ $x \notin B$ より，$x \notin A \cup B$ となり矛盾）．同時に $x \in C$ が得られる（もしそうでないなら，$x \neq C$ だが，$x \notin A$ かつ $x \notin C$ より，$x \notin A \cup C$ となり矛盾）．　つまり，$x \in B$ かつ $x \in C$ となり，共通部分の定義より $x \in B \cap C$ である．ゆえに $x \in A \cup (B \cap C)$ が得られる．

(I), (II) より ($\supset$) が成立．
以上より，($\subset$) と ($\supset$) が証明されたので等号が成立する．　$\square$

注　解答例 1 はこの場合は場合分けの数が有限なので正しい証明ではあるが，この後，話が複雑になっていくと使えなくなる方法である．よって解答例 2 の解法を勧める．なお，解答例 1 の場合分け (i), (ii), (iii) が解答例 2 の (I) に該当し，解答例の場合分け (iv) が解答例 2 の (II) に該当している．

問 1 A, B, C を集合とする．次を証明せよ．

(1) $A \subset B$ ならば $A \cup C \subset B \cup C$

証明　$x \in A \cup C$ とする．和集合の定義より $x \in A$ または $x \in C$.

(i) $x \in A$ のとき，仮定より $x \in B$ である．よって $x \in B$，つまり $x \in B \cup C$ である．

(ii) $x \in C$ のとき，$x \in B \cup C$ である．

(i), (ii) より $x \in B \cup C$. ゆえに $A \cup C \subset B \cup C$ が成立する．　$\square$

(2) $A \subset B$ ならば $A \cap C \subset B \cap C$

証明　$x \in A \cap C$ とする．共通部分の定義より $x \in A$ かつ $x \in C$. 仮定より $x \in B$ かつ $x \in C$ と言える．つまり共通部分の定義より $x \in B \cap C$. ゆえに $A \cap C \subset B \cap C$ が成立する．　$\square$

(3) $A \subset C$ かつ $B \subset C$ ならば $A \cup B \subset C$

証明　$x \in A \cup B$ とする．和集合の定義より $x \in A$ または $x \in B$.

(i) $x \in A$ のとき，仮定 $A \subset C$ より $x \in C$.

(ii) $x \in B$ のとき，仮定 $B \subset C$ より $x \in C$.

(i), (ii) より $x \in C$. ゆえに $A \cup B \subset C$ が成立する． □

(4) $A \cup B = A$ ならば $B \subset A$

証明　$x \in B$ とする．このとき和集合の定義より $x \in A \cup B$. 仮定より $x \in A$. ゆえに $B \subset A$ が成立する． □

(5) $A \cap B = A$ ならば $A \subset B$

証明　$x \in A$ とする．このとき仮定より $x \in A \cap B$. 共通部分の定義より $x \in A$ かつ $x \in B$. つまり $x \in B$. ゆえに $A \subset B$ が成立する． □

問 2 A, B を集合とする．次を証明せよ．

$$(A \cup B) \cap A = A$$

証明　($\subset$) を示す．$x \in (A \cup B) \cap A$ とする．共通部分の定義より $x \in A \cup B$ かつ $x \in A$. よって $x \in A$. ゆえに

$$(A \cup B) \cap A \subset A$$

が成立する．
($\supset$) を示す．$x \in A$ とする．和集合の定義より $x \in A$ かつ $x \in A \cup B$ と言える．よって，共通部分の定義より $x \in (A \cup B) \cap A$. ゆえに

$$(A \cup B) \cap A \supset A$$

が成立する．
　以上より等号が成立する． □

問 3 次の否定を述べよ．
(例) 「彼はすべての都道府県を旅した.」

否定　「ある都道府県があって，彼はその都道府県を旅していない.」
「全ての都道府県を旅していない.」は言い過ぎ.

(1) 「ある年があって，数理の人数が 100 人を超えた.」

否定　「どの年も数理の人数は 100 人を超えていない.」
「ある年があって，数理の人数が 100 人を超えていない.」では足りない.

(2) 「ある講義があって，その講義は龍大のすべての学生が受講している.」

否定 「どのような講義に対しても, ある龍大生がいて, その講義を受講していない.」

(3) 「微積分及び演習 I を受講しているすべての学生に対してある B リーグのチームがあって, その学生はそのチームが好きだ.」

否定 「微積分及び演習 I を受講しているある学生がいて, どの B リーグのチームもその学生は好きではない.」