2026/06/30/No.10

微積分及び演習 I・自習シート

問 1　[高校までの復習] 次の関数を微分せよ.

(1) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$

(2) $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$

(3) $f(x) = \dfrac{x^3}{1+x^2}$

(4) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

(5) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

(6) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}$

(7) $f(x) = \log(1+x^2)$

解答

(1)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1(1+x^2) - x(2x)}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x(1+x^2) - x^2(2x)}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{2x(1+x^2-x^2)}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{2x}{(1+x^2)^2} \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3x^2(1+x^2) - x^3(2x)}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{3x^2+3x^4-2x^4}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{3x^2+x^4}{(1+x^2)^2} \end{aligned}$$

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと. 提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.

(4)

$$\begin{aligned}f'(x) &= \left((1+x^2)^{1/2}\right)' \\ &= -\frac{1}{2}(1+x^2)^{-3/2}2x \\ &= -\frac{x}{(1+x^2)^{3/2}}\end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{1\sqrt{1+x^2} - x\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} \\ &= \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^{3/2}} \\ &= \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}\end{aligned}$$

(6)

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{2x\sqrt{1+x^2} - x^2\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} \\ &= \frac{2x+2x^3-x^3}{(1+x^2)^{3/2}} \\ &= \frac{2x+x^3}{(1+x^2)^{3/2}}\end{aligned}$$

(7)

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{1}{1+x^2}2x \\ &= \frac{2x}{1+x^2}\end{aligned}$$

問 2　Rolle の定理を用いて, 次の Cauchy の平均値の定理が成立することを証明せよ.

$I = [a,b]$, $f, g \in C(I)$ で f, g はそれぞれ (a,b) 上で微分可能であるとする．また, ${}^{\forall}x \in (a,b)$, $g'(x) \neq 0$ と仮定する．このとき, ${}^{\exists}c \in (a,b)$ s.t.

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

証明　$h(x) := (g(b)-g(a))f(x) - (f(b)-f(a))g(x)$ とおけばよい. 実際... $g(a) = g(b)$ と仮定すると Rolle の定理より ${}^{\exists}c \in (a,b)$ s.t. $g'(c) = 0$ となり仮定に反するので, $g(a) \neq g(b)$ と仮定できる.

$$h(x) := (g(b)-g(a))f(x) - (f(b)-f(a))g(x)$$

とおくと, $h \in C(I)$ で h は (a,b) 上で微分可能である．また, $h(a) = h(b)$ を満たすので, h に Rolle の定理を用いれば, ${}^{\exists}c \in (a,b)$ s.t. $h'(c) = 0$ となる.

$$h'(x) = (g(b)-g(a))f'(x) - (f(b)-f(a))g'(x)$$

なので,

$$0 = h'(c) = (g(b) - g(a))f'(c) - (f(b) - f(a))g'(c).$$

後は移項して結論を得る. □

発展　次の定理の証明を確認しておこう.

$I := (a,b)$, $f : I \to \mathbb{R}$ は I 上で単調増加かつ微分可能で $f'(x) \neq 0$ とする. このとき, 逆関数 $f^{-1} : (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$ は $(\alpha,\beta) := (f(a), f(b))$ 上で微分可能で

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} \quad (\text{ただし}, x = f^{-1}(y))$$

すなわち, $y = f(x)$, $x = f^{-1}(y)$ とおけば

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\dfrac{dy}{dx}}.$$

証明　$y = f(x)$, $x = f^{-1}(y)$ とおく. $x_0 \in I$ とする. $y_0 := f(x_0) \in (\alpha,\beta)$ 上で $x = f^{-1}(y)$ は微分可能であることを示す. 前提として, $f : I \to \mathbb{R}$ が単調増加かつ $f'(x) \neq 0$ より, 狭義単調増加となるので全単射である [1]. すなわち逆関数 $f^{-1} : (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$ が存在する. さらにその f^{-1} も狭義単調増加となる (実際, $y_1 < y_2$ にもかかわらず $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$ が成立しない, つまり

$$f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$$

だとすると, f の狭義単調性より

$$y_1 = f(f^{-1}(y_1)) \geq f(f^{-1}(y_2)) = y_2$$

となり矛盾. $y_1 > y_2$ のときも同様. よって f^{-1} も狭義単調増加となる).

　まず, $y_0 := f(x_0) \in (\alpha,\beta)$ 上で $x = f^{-1}(y)$ は連続であることを示す. $x_0 = f^{-1}(y_0)$ に注意すれば

$$a < x_0 < b, \quad \alpha = f(a) < y_0 < f(b) = \beta$$

である. $^\forall\varepsilon > 0$, $x_0 - \varepsilon < x_0 < x_0 + \varepsilon$ より狭義単調性から

$$f(x_0 - \varepsilon) < y_0 < f(x_0 + \varepsilon)$$

を得る. そこで, $\delta_\varepsilon := \min\{y_0 - f(x_0 - \varepsilon), f(x_0 + \varepsilon) - y_0\}$ とおくと, $^\forall y; |y - y_0| < \delta_\varepsilon$

$$-\delta_\varepsilon < y - y_0 < \delta_\varepsilon,$$

$$f(x_0) - \delta_\varepsilon < y < f(x_0) + \delta_\varepsilon,$$

$$f(x_0) - \bigl(y_0 - f(x_0 - \varepsilon)\bigr) < y < f(x_0) + \bigl(f(x_0 + \varepsilon) - y_0\bigr),$$

$$f(x_0 - \varepsilon) < y < f(x_0 + \varepsilon),$$

[1] 実際, $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ が狭義単調増加ならば, $f(a) < f(b)$ で $f((a,b)) = (f(a), f(b))$ なので全射であり, $x_1, x_2 \in (a,b) : x_1 \neq x_2$ ならば, $x_1 < x_2$ か $x_1 > x_2$ のいずれかだが, 狭義単調性より $f(x_1) < f(x_2)$ か $f(x_1) > f(x_2)$ となり単射である.

よって f^{-1} の狭義単調性から

$$x_0 - \varepsilon < f^{-1}(y) < x_0 + \varepsilon$$

つまり,

$$|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| = |f^{-1}(y) - x_0| < \varepsilon.$$

最後に, $y_0 \in (f(a), f(b))$ 上で微分可能であることを示す. $h \in \mathbb{R}$: $h \neq 0$ とし, $k := f^{-1}(y_0 + h) - f^{-1}(y_0)$ とおくと, $k \neq 0$ でさらに f^{-1} の連続性より

$$k \to 0 \quad (h \to 0)$$

を得る. また,

$$k + f^{-1}(y_0) = f^{-1}(y_0 + h),$$
$$k + x_0 = f^{-1}(y_0 + h)$$

より f を作用させれば

$$f(k + x_0) = f(f^{-1}(y_0 + h)) = y_0 + h = f(x_0) + h$$

なので,

$$h = f(x_0 + k) - f(x_0)$$

に注意して

$$\begin{aligned}\frac{f^{-1}(y_0 + h) - f^{-1}(y_0)}{h} &= \frac{k}{f(x_0 + k) - f(x_0)} \\ &= \frac{1}{\dfrac{f(x_0 + k) - f(x_0)}{k}} \\ &\to \frac{1}{f'(x_0)} \quad (h \to 0).\end{aligned}$$

これが任意の $y_0 \in (f(a), f(b))$ で成立するので, f^{-1} は区間 $(f(a), f(b))$ 上で微分可能で,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\dfrac{dy}{dx}}.$$

□