

令和7年度 位相入門I 小テスト対策プリント

数理・知能・電子・機械・応化・環境 課程 _____ 回生 _____

学生番号 _____ 名前 _____

[0] 定義の確認 $A \subset \mathbb{R}^2$ とする.

A が開集合である. $\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall x \in A, \exists \varepsilon_x > 0 \text{ s.t. } N(x; \varepsilon_x) \subset A.$

A が閉集合である. $\stackrel{\text{def}}{\iff} A^c$ が開集合である.

[1] 次で定義される $I \subset \mathbb{R}$ や $A \subset \mathbb{R}^2$ に対して, 内部, 外部, 境界をそれぞれ求めよ. ただし, $x := (x_1, x_2)$ と表記する.

(1) $I = [0, 1).$

(2) $A = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1, x_2 \geq 0\}.$

(3) $I = \mathbb{Q}.$

解答例 (1) $I^i = (0, 1),$

$I^e = (-\infty, 0) \cup (1, \infty),$

$\partial I = \{0, 1\}.$

(2) $A^i = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1, x_2 > 0\},$

$A^e = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 > 1, x_2 \geq 0\} \cup \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 < 0\},$

$\partial A = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1, x_2 \geq 0\} \cup \{(x_1, 0) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x_1 \leq 1\}.$

(3) $I^i = \emptyset,$

$I^e = \emptyset,$

$\partial I = \mathbb{R}.$

[2] 集合 $A := N(\mathbf{0}; 1)$ は $\mathbb{R}^2$ の開集合であることを証明せよ. ただし, $\mathbf{0}$ は原点 $(0, 0)$ を意味する.

解答例 $\forall x \in A, \exists \varepsilon_x > 0 \text{ s.t.}$

$$N(x; \varepsilon_x) \subset A$$

を示せばよい. $x \in A$ とする. $\varepsilon_x := 1 - d(x, \mathbf{0})$ とおくと, $x \in A = N(\mathbf{0}; 1)$ より

$$d(x, \mathbf{0}) < 1$$

なので, $\varepsilon_x > 0$ である. 最後にこの半径 ε_x で

$$N(x; \varepsilon_x) \subset A$$

を示す. $y \in N(x; \varepsilon_x)$ とすると ε -近傍の定義より

$$d(y, x) < \varepsilon_x$$

以上より

$$d(y, \mathbf{0}) \leq d(y, x) + d(x, \mathbf{0}) < \varepsilon_x + d(x, \mathbf{0}) = 1$$

よって $y \in N(\mathbf{0}, 1) = A$. 以上より

$$N(x; \varepsilon_x) \subset A$$

がいえたので, 開集合の定義を満たす. $\square$

[3] $U_\alpha \subset \mathbb{R}^2$ を開集合とする, ただし $\alpha \in I$ は添え字集合. このとき,

$$\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$$

も開集合であることを証明せよ.

解答例 $U := \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ とおく. $\forall x \in U, \exists \varepsilon_x > 0 \text{ s.t.}$

$$N(x; \varepsilon_x) \subset U$$

を示せばよい. $x \in U$ とする. このとき和集合の定義から $\exists \alpha_0 \in I \text{ s.t.}$

$$x \in U_{\alpha_0}.$$

この選ばれた U_{α_0} も開集合なので, $\exists \varepsilon_x > 0 \text{ s.t.}$

$$N(x; \varepsilon_x) \subset U_{\alpha_0}.$$

さらに

$$U_{\alpha_0} \subset \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha = U$$

であるので開集合の定義を満たす. $\square$

[4] $A, B \subset \mathbb{R}^2$ とする. $A \subset B$ ならば $A^i \subset B^i$ を証明せよ.

解答例 $A \subset B$ と仮定する. $A^i \subset B^i$ を示す. $x \in A^i$ とする. 内部の定義より x は A の内点なので, $\exists \varepsilon_x > 0 \text{ s.t.}$

$$N(x; \varepsilon_x) \subset A$$

がいえる. 仮定 $A \subset B$ より

$$N(x; \varepsilon_x) \subset B$$

が成立する. よって x に対して B に含まれるように半径 $\varepsilon_x > 0$ の ε -近傍がとれたことになる. つまり点 x は B の内点であることが示された. よって $x \in B^i$ となり, $A^i \subset B^i$. $\square$

6 $A, B \subset \mathbb{R}^2$ とする.

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

を証明せよ.

解答例 (C) を示す. $x \in \overline{A \cup B}$ とする. 閉包の定義より x は $A \cup B$ の触点, すなわち, $\forall \varepsilon > 0, N(x; \varepsilon) \cap (A \cup B) \neq \emptyset$. よって, $y \in N(x; \varepsilon) \cap (A \cup B)$ がとれる. つまり, $y \in N(x; \varepsilon)$ かつ $y \in A \cup B$, すなわち, $y \in A$, または $y \in B$ である. (i) $y \in A$ のとき, $y \in N(x; \varepsilon)$ より $y \in N(x; \varepsilon) \cap A$, つまり x は A の触点, よって $x \in \overline{A}$. ゆえに

$$x \in \overline{A} \cup \overline{B}.$$

(ii) $y \in B$ のとき, $y \in N(x; \varepsilon)$ より $y \in N(x; \varepsilon) \cap B$, つまり x は B の触点, よって $x \in \overline{B}$. ゆえに

$$x \in \overline{A} \cup \overline{B}.$$

(i), (ii) より, $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$ が示された.

(C) を示す. $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$ とする. 和集合の定義より $x \in \overline{A}$, または $x \in \overline{B}$.

(i) $x \in \overline{A}$ のとき, 閉包の定義より x は A の触点, よって, $\forall \varepsilon > 0, N(x; \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. よって, $y \in N(x; \varepsilon) \cap A$ がとれる. つまり, $y \in N(x; \varepsilon)$ かつ $y \in A$, すなわち, $y \in A \cup B$. ゆえに $N(x; \varepsilon) \cap (A \cup B) \neq \emptyset$ といえる. 以上より, $x \in \overline{A \cup B}$. (ii) $x \in \overline{B}$ のとき, 閉包の定義より x は B の触点, よって, $\forall \varepsilon > 0, N(x; \varepsilon) \cap B \neq \emptyset$. よって, $y \in N(x; \varepsilon) \cap B$ がとれる. つまり, $y \in N(x; \varepsilon)$ かつ $y \in B$, すなわち, $y \in A \cup B$. ゆえに $N(x; \varepsilon) \cap (A \cup B) \neq \emptyset$ といえる. 以上より, $x \in \overline{A \cup B}$.

(i), (ii) より $\overline{A \cup B} \supset \overline{A} \cup \overline{B}$ が示された.

ゆえに等号成立. $\square$

7 $A, B \subset \mathbb{R}^2$ とする. $A \subset B$ ならば $\overline{A} \subset \overline{B}$ を証明せよ.

解答例 $x \in \overline{A}$ とする. 閉包の定義より x は A の触点, すなわち, $\forall \varepsilon > 0, N(x; \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. よって, $y \in N(x; \varepsilon) \cap A$ がとれる. つまり, $y \in N(x; \varepsilon)$ かつ $y \in A$. 仮定 $A \subset B$ より, $y \in B$ なので, $N(x; \varepsilon) \cap B \neq \emptyset$. つまり, x は B の触点である. よって $x \in \overline{B}$. $\square$

8 $A \subset \mathbb{R}^2$ をコンパクト集合とする. $B \subset A$ が閉集合ならば B もコンパクト集合であることを証明せよ.

解答例 $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を B の任意の開被覆とする. すなわち,

$$B \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$$

と仮定する. B は閉集合なので B^c は開集合である. そこで $U_{\lambda_0} := B^c$ とおき, $\Lambda' := \Lambda \cup \{\lambda_0\}$ と添え字集合をとりなおして (1 つだけ追加して) $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda'}$ を考える. まず,

$$A \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda'} U_\lambda$$

が成立する. 実際, $x \in A$ とすると,

(1) $x \in B$ のとき,

$$x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda'} U_\lambda.$$

(2) $x \notin B$ のとき, $x \in B^c = U_{\lambda_0}$ より

$$x \in U_{\lambda_0} \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda'} U_\lambda.$$

つまり $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda'}$ がコンパクト集合 A の開被覆になっている. よってコンパクトの定義より有限開被覆が選び直せて (その中に U_{λ_0} が入っていても入っていなくてもどちらでもよいが入れても問題ない), すなわち $\{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N\} \subset \Lambda'$ が存在して

$$A \subset \bigcup_{k=0}^N U_{\lambda_k}$$

とできる. $B \subset A$ より

$$B \subset \bigcup_{k=0}^N U_{\lambda_k}$$

であるが, $U_{\lambda_0} = B^c$ は取り除いて,

$$B \subset \bigcup_{k=1}^N U_{\lambda_k}$$

とできる. $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N\} \subset \Lambda$ より $\{U_{\lambda_k}\}_{k=1}^N$ が B の任意開被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ に対する有限開被覆になっているので, B はコンパクト集合である. $\square$