

位相入門II・自習シート

以後, 特に断りが無い限り距離空間 $(\mathbb{R}^2; d_2)$, つまり, 全体集合 $X = \mathbb{R}^2$ に通常距離 d_2 が入った空間を考える.

問1 $a \in \mathbb{R}^2$ とする. 次の集合 F は $\mathbb{R}^2$ の閉集合であることを証明せよ. ただし, これまでの講義や自習シートで扱った, $\mathbb{R}^2$, $N(a; 1)$, $\mathbb{R}^2 \setminus \{a\}$ はそれぞれ開集合であることを用いてもよい.

(1) $F := \emptyset$

(2) $F := \{a\}$

(3) $F := \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ (半径1の円の境界と内側)

問2 $n \in \mathbb{N}$ とし, U_n を

$$U_n := N\left(0; \frac{1}{n}\right)$$

とおく.

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = \{0\}$$

であることを集合の等号の定義に従って証明せよ.

問3 次の (1) と (2) を証明せよ. ただし, ド・モルガンの法則や開集合の性質 (6/25 の講義 or 自習シート No.6 の問2) を用いてもよい:

(1) F_λ を $\mathbb{R}^2$ の閉集合とする (ただし $\lambda \in \Lambda$ とし Λ は添え字集合). このとき

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$$

も $\mathbb{R}^2$ の閉集合である.

(2) $n \in \mathbb{N}$ とし, $F_1, F_2, \dots, F_n$ を $\mathbb{R}^2$ の閉集合とする. このとき

$$F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_n$$

も $\mathbb{R}^2$ の閉集合である.