

位相入門I・自習シート

問1 $X = \mathbb{R}^2$ つまり平面のとき, $a, b \in X$ に対して $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$ とおき,

$$d_1(a, b) := |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|$$

と定義する (マンハッタン距離, L^1 距離). $a = (4, 0)$, $b = (4, 3)$, $c = (2, 2)$ のとき $d_1(a, b)$ の例をもとに, $d_1(b, c)$, $d_1(a, c)$ をそれぞれ求めよ.

$$d_1(a, b) = |4 - 4| + |0 - 3| = 3$$

問2 $X := \{\text{高槻, 京都, 大津, 瀬田}\}$ とする. それぞれ JR の駅を表すとし, その間の運賃は以下の通りとする.

A \ B	高槻	京都	大津	瀬田
高槻	0	410	580	660
京都	410	0	200	320
大津	580	200	0	200
瀬田	660	320	200	0

$A, B \in X$ に対して $d(A, B)$ を上記表の値とする. 例えば A を高槻, B を京都とすると

$$d(\text{高槻}, \text{京都}) = 410$$

である. $d(\text{大津}, \text{大津})$, $d(\text{大津}, \text{瀬田})$, $d(\text{瀬田}, \text{大津})$ をそれぞれ求めよ.

問3 $X = \mathbb{R}^2$ のとき, $a, b \in X$ に対して $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$ とおき,

$$d_\infty(a, b) := \max\{|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|\}$$

と定義する (チェビシェフ距離, L^∞ 距離). $a = (4, 0)$, $b = (4, 3)$, $c = (2, 2)$ のとき $d_\infty(a, b)$ の例をもとに, $d_\infty(b, c)$, $d_\infty(a, c)$ をそれぞれ求めよ.

$$d_\infty(a, b) = \max\{|4 - 4|, |0 - 3|\} = 3$$

例題 $X = \mathbb{R}$ のとき,

$$d(x, y) := |x - y|$$

は $\mathbb{R}$ 上の距離である. 実際, 距離の定義 (D1) から (D3) を満たすことを示せばよい. $x, y \in X = \mathbb{R}$ とする.

$$d(x, y) = |x - y| \geq 0$$

また, $d(x, y) = 0$ ならば, $|x - y| = 0$ となり, $x = y$. 逆に $x = y$ ならば, $d(x, y) = |x - y| = 0$. よって (D1) が成立.

次に, $x, y \in X$ とする. $d(x, y) = |x - y| = |y - x| = d(y, x)$ より (D2) も成立.

最後に, $x, y, z \in X = \mathbb{R}$ とする. 三角不等式¹⁾より

$$\begin{aligned} d(x, z) &= |x - z| \\ &= |x - y + y - z| \\ &\leq |x - y| + |y - z| \\ &= d(x, y) + d(y, z) \end{aligned}$$

よって (D3) も成立. つまり, d は $\mathbb{R}$ 上の距離である.

問 4 上記例題を元に $X = \mathbb{R}^2$ のとき, $a, b \in X$ に対して $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$ とおき,

$$d_1(a, b) := |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|$$

と定義する (マンハッタン距離, L^1 距離). d_1 は $\mathbb{R}^2$ の距離であることを示せ.

¹⁾三角不等式は次のように証明できる.

$$\begin{aligned} (|x| + |y|)^2 - |x + y|^2 &= x^2 + 2|x||y| + y^2 - (x^2 + 2xy + y^2) \\ &= 2|x||y| - 2xy \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

より $|x + y| \leq |x| + |y|$.