

位相入門I・自習シート

問1 $E_1 \subset \mathbb{R}, E_2 \subset \mathbb{R}$ とし, それぞれ E_1 と E_2 は空ではない有界な集合とする. (1)–(2) を証明せよ.

(1) $E := \{x + y \in \mathbb{R} : x \in E_1, y \in E_2\}$ とおく¹⁾. このとき

$$\inf E \geq \inf E_1 + \inf E_2$$

(2) $-E_1 := \{-x \in \mathbb{R} : x \in E_1\}$ ²⁾ とおく. このとき

$$\sup(-E_1) = -\inf E_1.$$

問2 $A, B \subset \mathbb{R}$ を空でない有界集合とする. このとき次を証明せよ.

(1) $\inf A \leq \sup A$.

(2) $\forall a \in A, \forall b \in B, a \leq b$ が成立するならば $\sup A \leq \inf B$.

(3) $\forall a \in A, \exists b_a \in B$ s.t. $a \leq b_a$ が成立するならば $\sup A \leq \sup B$.

問3 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を数列, α, c をそれぞれ実数とする. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ を満たすと仮定する. このとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c a_n = c \alpha \quad (*)$$

を ε - N 論法で証明したい. 次の問いに答えよ.

(1) ε - N 論法による $(*)$ の定義をかけ.

(2) $c = 0$ のときを考える. $\varepsilon > 0$ とする. この場合, $\forall n \geq 1, |ca_n - c\alpha| < \varepsilon$ であることを確かめよ.

(3) $c \neq 0$ のときを考える. $(*)$ を ε - N 論法で証明せよ.

問4 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を数列, α を実数とする. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ を満たすと仮定する. このとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |\alpha|$$

を ε - N 論法で証明せよ³⁾.

つづく

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと. 提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.

¹⁾ いいかえると $E = \{z \in \mathbb{R} : \exists x \in E_1, \exists y \in E_2 \text{ s.t. } z = x + y\}$

²⁾ いいかえると $-E_1 := \{z \in \mathbb{R} : \exists x \in E_1 \text{ s.t. } z = -x\}$

³⁾ 任意の実数 $r, s \in \mathbb{R}$ に対して $||r| - |s|| \leq |r - s|$ が成立することを用いるとよい.

問5 例題を参考に、一般項が次の様に与えられた数列 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ の0への収束を ε - N 論法で証明せよ.

(例題) $a_n := \frac{1}{n}$

解答例

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ s.t.}$$

$$\forall n \geq N_\varepsilon, \left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon$$

を示せばよい. そこで先に

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

となる番号を見積もっておくと

$$\frac{1}{n} < \varepsilon,$$

$$\frac{1}{\varepsilon} < n$$

となる番号であればよい.

$\varepsilon > 0$ とする. アルキメデスの原理⁴⁾より $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t.

$$\frac{1}{\varepsilon} < N_\varepsilon.$$

このとき, $\forall n \geq N_\varepsilon$ に対して

$$\frac{1}{\varepsilon} < N_\varepsilon \leq n$$

より

$$\frac{1}{n} < \varepsilon.$$

よって,

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

以上により

$$a_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow +\infty).$$

(1) $a_n := \frac{1}{\sqrt{n}}$

(2) $a_n := \frac{1}{2^n}$

⁴⁾ 「自然数は上に有界ではない」という定理.