

位相入門I・自習シート

問1 $E \subset \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ とする. 例題をもとに次の命題の否定を論理式で述べよ.

(例1) $\forall x \in E, x \leq \alpha$.

解答例 $\exists x \in E \text{ s.t. } x > \alpha$.

考え方1 $\forall x \in E, x \leq \alpha$ とは「すべての $x \in E$ に対して $x \leq \alpha$ 」という意味である. これを否定すると「 $x \leq \alpha$ を満たさない反例が E に存在する」ということなので「ある $x \in E$ が存在して $x > \alpha$ 」となる. よって

$$\exists x \in E \text{ s.t. } x > \alpha$$

となる.

考え方2 機械的に「 $\forall$ 」や「 $\exists$ — s.t.」と最後の命題 P の区切りごとに箱で分けて考えると

$$\boxed{\forall x \in E \quad \boxed{x \leq \alpha}}$$

となる. ここで最後の命題 P とは $x \leq \alpha$ の部分を意味する. この否定

$$\neg \boxed{\forall x \in E \quad \boxed{x \leq \alpha}}$$

は(ただし $\neg$ の記号は否定を表す記号である), 機械的に「 $\forall$ 」を「 $\exists$ 」に, 「 $\exists$ 」を「 $\forall$ 」に入れ換え, 最後の命題 P を否定することで, 次のように得られる.

$$\boxed{\exists x \in E \quad \boxed{x > \alpha}}$$

よってこれを書き直して($\exists$ の最後に付く「s.t.」を付け加えて)

$$\exists x \in E \text{ s.t. } x > \alpha$$

となる.

(例2) $\exists y \in E \text{ s.t. } y \geq \beta$.

解答例 $\forall y \in E, y < \beta$.

考え方1 $\exists y \in E \text{ s.t. } y \geq \beta$ とは「ある $y \in E$ が存在して $y \geq \beta$ 」という意味である. これを否定すると「 $y \geq \beta$ を満たすような E の元 y は存在しない」ということなので「すべての $y \in E$ に対して $y < \beta$ 」となる. よって

$$\forall y \in E, y < \beta$$

となる.

考え方 2 機械的に「 $\forall$ 」や「 $\exists$ — s.t.」と最後の命題 P の区切りごとに箱で分けて考えると (s.t. は省略する)

$$\boxed{\exists y \in E \quad \boxed{y \geq \beta}}$$

となる. ここで最後の命題 P とは $y \geq \beta$ の部分を意味する. この否定

$$\neg \boxed{\exists y \in E \quad \boxed{y \geq \beta}}$$

は, 機械的に「 $\forall$ 」を「 $\exists$ 」に, 「 $\exists$ 」を「 $\forall$ 」に入れ換え, 最後の命題 P を否定することで,

$$\boxed{\forall y \in E \quad \boxed{y < \beta}}$$

となる. よって

$$\forall y \in E, y < \beta$$

となる.

- (1) $\exists k \in \mathbb{Z}$ s.t. $\alpha = 2k$.
- (2) $\forall x \in E, \exists k \in \mathbb{Z}$ s.t. $x = 2k$.
- (3) $\forall x \in E, \alpha - 1 \geq x$.
- (4) $\exists \varepsilon > 0$ s.t. $\forall x \in E, \alpha - \varepsilon \geq x$.

問 2 次の集合 $E \subset \mathbb{R}$ に対して $\sup E, \inf E$ をそれぞれ求めよ.

- (1) $E = (0, 1)$
- (2) $E = [0, 1] \cup (2, 3)$
- (3) $E = [0, +\infty)$