

位相入門II・自習シート

問1 $A \subset \mathbb{R}^2$, $x \in \mathbb{R}^2$ とする. $\forall \varepsilon > 0$, $N(x; \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ ならば $x \notin A^e$ であることを, 対偶を示すことで証明せよ.

解答例 対偶を示す. すなわち $x \in A^e$ ならば $\exists \varepsilon_0 > 0$ s.t. $N(x; \varepsilon_0) \cap A = \emptyset$ を示せばよい. $x \in A^e$ とすると外部の定義より, 点 x は A の外点なので $\exists \varepsilon_0 > 0$ s.t. $N(x; \varepsilon_0) \subset A^c$. よって, $N(x; \varepsilon_0) \cap A = \emptyset$. 対偶が証明できたので, $\forall \varepsilon > 0$, $N(x; \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ ならば $x \notin A^e$ である. $\square$

問2 $A \subset \mathbb{R}^2$, $x \in \mathbb{R}^2$ とする. $\forall \varepsilon > 0$, $N(x; \varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset$ ならば $x \notin A^i$ であることを証明せよ.

解答例 $A \subset \mathbb{R}^2$, $x \in \mathbb{R}^2$ とし, $\forall \varepsilon > 0$, $N(x; \varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset$ を仮定する. $B := A^c$ とおく. 一般に $B^e = (B^c)^i$ であることに注意する. 仮定を書き換えると $\forall \varepsilon > 0$, $N(x; \varepsilon) \cap B \neq \emptyset$ となり, この $B \subset \mathbb{R}^2$ は問1の仮定を満たす. よって, 問1を用いると, $x \notin B^e$ を得る. つまり, $x \notin B^e = (B^c)^i = A^i$. $\square$

別解 対偶を示す. すなわち $x \in A^i$ ならば $\exists \varepsilon_0 > 0$ s.t. $N(x; \varepsilon_0) \cap A^c = \emptyset$ を示せばよい. $x \in A^i$ とすると内部の定義より, 点 x は A の内点なので $\exists \varepsilon_0 > 0$ s.t. $N(x; \varepsilon_0) \subset A$. よって, $N(x; \varepsilon_0) \cap A^c = \emptyset$. 対偶が証明できたので, $\forall \varepsilon > 0$, $N(x; \varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset$ ならば $x \notin A^i$ である. $\square$

問3 $A \subset \mathbb{R}^2$, $x \in \mathbb{R}^2$ とする.

点 x が A の境界点である. $\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall \varepsilon > 0$, $N(x; \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ かつ $N(x; \varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset$.

と定義する. このとき,

点 x が A の境界点である. $\iff x \notin A^e$ かつ $x \notin A^i$.

が成立することを示せ.

解答例 $(\implies)$ を示す. 点 x が A の境界点であると仮定する. 定義より $\forall \varepsilon > 0$, $N(x; \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ かつ $N(x; \varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset$ が成立する. 問1より $x \notin A^e$, 問2より $x \notin A^i$ が成立. よって $x \notin A^e$ かつ $x \notin A^i$ が成立する.

$(\impliedby)$ を示す. $x \notin A^e$ かつ $x \notin A^i$ を仮定する. $x \notin A^e$ より, x は A の外点ではないので, 外点の定義を否定して, $\forall \varepsilon > 0$, $N(x; \varepsilon) \not\subset A^c$. すなわち, $N(x; \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. 同時に, $x \notin A^i$ より, x は A の内点ではないので, 内点の定義を否定して, $\forall \varepsilon > 0$, $N(x; \varepsilon) \not\subset A$. すなわち, $N(x; \varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset$. よって x が A の境界点であることの定義を満たす. $\square$