

位相入門II・自習シート

問1 $A, B \subset \mathbb{R}^2$ とする. 次を証明せよ.

$$(A \cap B)^i = A^i \cap B^i.$$

証明 (⊂) を示す. $x \in (A \cap B)^i$ とする. 内部の定義より点 x は $A \cap B$ の内点である. よって $\exists \varepsilon_x > 0$ s.t.

$$N(x; \varepsilon_x) \subset A \cap B.$$

つまり,

$$N(x; \varepsilon_x) \subset A, \quad \text{かつ} \quad N(x; \varepsilon_x) \subset B$$

といえる. これは点 x が A の内点かつ B の内点であることを意味するので $x \in A^i$ かつ $x \in B^i$ となり,

$$x \in A^i \cap B^i.$$

よって

$$(A \cap B)^i \subset A^i \cap B^i.$$

(⊃) を示す. $x \in A^i \cap B^i$ とすると, 共通部分の定義より $x \in A^i$ かつ $x \in B^i$. 内部の定義より点 x は A の内点かつ B の内点であるので $\exists \varepsilon_A, \varepsilon_B > 0$ s.t.

$$N(x; \varepsilon_A) \subset A \quad \text{かつ} \quad N(x; \varepsilon_B) \subset B.$$

そこで, $\varepsilon_x := \min\{\varepsilon_A, \varepsilon_B\}$ とおくと, $\varepsilon_x > 0$ であり

$$N(x; \varepsilon_x) \subset A \quad \text{かつ} \quad N(x; \varepsilon_x) \subset B$$

となり,

$$N(x; \varepsilon_x) \subset A \cap B.$$

これは点 x が $A \cap B$ の内点であることを意味するので,

$$x \in (A \cap B)^i.$$

よって

$$(A \cap B)^i \supset A^i \cap B^i.$$

以上より等号が成立.

□

問2 $A \subset \mathbb{R}^2$ とし, $B \subset A$ を $\mathbb{R}^2$ の開集合とする. このとき, $B \subset A^i$ を証明せよ¹⁾

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと. 提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.

¹⁾ A の内部 A^i は A に含まれる最大の開集合であることを意味する.

解答例 $B \subset A$ を $\mathbb{R}^2$ の開集合とする. $x \in B$ とする. B は開集合なので $\exists \varepsilon_x > 0$ s.t.

$$N(x; \varepsilon_x) \subset B.$$

ここで, $B \subset A$ なので,

$$N(x; \varepsilon_x) \subset A$$

といえる. つまり, x は A の内点である. よって, $x \in A^i$. つまり, $B \subset A^i$. $\square$

注 この結果を言い換える, A に含まれるどのような開集合 B をえらんでも, $B \subset A^i$ となるので, A^i が開集合であることから, A^i は A に含まれる最大の開集合といえる.

問3 $A \subset \mathbb{R}^2$, $x \in \mathbb{R}^2$ とする. 次の問いに答えよ.

- (1) 命題 「 $\forall \varepsilon > 0, N(x; \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ ならば $x \notin A^e$ 」 の対偶を論理記号で書け.
- (2) 上記 (1) の対偶を示すことで命題 「 $\forall \varepsilon > 0, N(x; \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ ならば $x \notin A^e$ 」 を証明せよ.

解答例 (1) 「P ならば Q」 の対偶は 「Q でないならば P でない」 である. よって 「 $\forall \varepsilon > 0, N(x; \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ ならば $x \notin A^e$ 」 の対偶は 「 $x \in A^e$ ならば $\exists \varepsilon_x > 0$ s.t. $N(x; \varepsilon_x) \cap A = \emptyset$ 」 となる.

(2) 対偶を示す. すなわち 「 $x \in A^e$ ならば $\exists \varepsilon_x > 0$ s.t. $N(x; \varepsilon_x) \cap A = \emptyset$ 」 を示せばよい. $x \in A^e$ とすると外部の定義より, 点 x は A の外点なので $\exists \varepsilon_0 > 0$ s.t. $N(x; \varepsilon_0) \subset A^c$. よって, $N(x; \varepsilon_0) \cap A = \emptyset$.