

位相入門II・自習シート

以後、特に断りが無い限り距離空間 $(\mathbb{R}^2; d_2)$, つまり、全体集合 $X = \mathbb{R}^2$ に通常距離 d_2 が入った空間を考える.

問 1 $a \in \mathbb{R}^2$ とする. 次の集合 F は $\mathbb{R}^2$ の閉集合であることを証明せよ. ただし, これまでの講義や自習シートで扱った, $\mathbb{R}^2$, $N(a; 1)$, $\mathbb{R}^2 \setminus \{a\}$ はそれぞれ開集合であることを用いてもよい.

(1) $F := \emptyset$

(2) $F := \{a\}$

(3) $F := \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ (半径 1 の円の境界と内側)

解答例 (1) $F^c = \mathbb{R}^2$ は開集合なので, 閉集合の定義より F は $\mathbb{R}^2$ の閉集合. □

(2) $F^c = \mathbb{R}^2 \setminus \{a\}$ は開集合なので, 閉集合の定義より F は $\mathbb{R}^2$ の閉集合. □

(3)

$$F^c = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 > 1\}$$

であることに注意する. F^c が開集合であることを示す. すなわち

$$\forall x \in F^c, \exists \varepsilon_x > 0 \text{ s.t.}$$

$$N(x; \varepsilon_x) \subset F^c$$

を示せばよい. $x \in F^c$ とする.

$$d(0, x) = x_1^2 + x_2^2 > 1$$

より $\varepsilon_x := d(0, x) - 1$ とおくと, $\varepsilon_x > 0$ である. このとき,

$$N(x; \varepsilon_x) \subset F^c$$

である. 実際, $z \in N(x; \varepsilon_x)$ とすると, $d(z, x) < \varepsilon_x$ である. このとき,

$$d(z, 0) < \varepsilon_x + d(x, 0) = d(0, x) - 1 + d(0, x) = 2d(0, x) - 1,$$

なので, 三角不等式より

$$1 + d(z, x) < d(0, x) \leq d(0, z) + d(z, x),$$

両辺から $d(z, x)$ をひけば

$$1 < d(0, z)$$

つまり, $z_1^2 + z_2^2 > 1$. よって, $z \in F^c$.

以上より F は $\mathbb{R}^2$ の閉集合. □

問2 $n \in \mathbb{N}$ とし, U_n を

$$U_n := N\left(0; \frac{1}{n}\right)$$

とおく.

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = \{0\}$$

であることを集合の等号の定義に従って証明せよ.

解答例 (⊂) を示す. $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ とする. 共通部分の定義より,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x \in U_n = N\left(0; \frac{1}{n}\right).$$

よって, ε -近傍の定義から $d(x, 0) < 1/n$ が得られるので, 両辺 $n \rightarrow \infty$ とすると

$$d(x, 0) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

つまり

$$0 \leq d(x, 0) \leq 0$$

より $d(x, 0) = 0$. 距離の定義よりこれは $x = 0$ を意味する. すなわち, $x \in \{0\}$. ゆえに

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \subset \{0\}.$$

(⊃) を示す. $\forall x \in \{0\}$ に対して, $\{0\}$ は 1 点 0 からのみなる集合なので $x = 0$. さらに

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \in N\left(0; \frac{1}{n}\right) = U_n.$$

共通部分の定義より

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n.$$

ゆえに

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \supset \{0\}.$$

以上より等号が成立.

□

問3 次の (1) と (2) を証明せよ. ただし, ド・モルガンの法則や開集合の性質 (6/25 の講義 or 自習シート No.6 の問 2) を用いてもよい:

(1) F_λ を $\mathbb{R}^2$ の閉集合とする (ただし $\lambda \in \Lambda$ とし Λ は添え字集合). このとき

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$$

も $\mathbb{R}^2$ の閉集合である.

(2) $n \in \mathbb{N}$ とし, $F_1, F_2, \dots, F_n$ を $\mathbb{R}^2$ の閉集合とする. このとき

$$F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_n$$

も $\mathbb{R}^2$ の閉集合である.

解答例 (1) $F := \bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$ とおく. ド・モルガンの法則より

$$F^c = \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda \right)^c = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda^c$$

で, F_λ^c はすべて開集合なので開集合の性質より F^c は開集合となる. よって F は $\mathbb{R}^2$ の閉集合. $\square$

(2) $F := F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_n$ とおく. ド・モルガンの法則より

$$F^c = \left(\bigcup_{k=1}^n F_k \right)^c = \bigcap_{k=1}^n F_k^c$$

で, F_k^c はすべて開集合なので開集合の性質より F^c は開集合となる. よって F は $\mathbb{R}^2$ の閉集合. $\square$