位相入門II・自習シート

問1 次の集合は $\mathbb{R}^2$ の開集合であることを示せ. ただし $a \in \mathbb{R}^2$ とする.

- (1) $\mathbb{R}^2$
- (2) $N(a; 1)$
- (3) $\mathbb{R}^2 \setminus \{a\}$

解答例

- (1) $U := \mathbb{R}^2$ とおく. $\forall x \in U, \exists \varepsilon_x > 0$ s.t.

$$N(x; \varepsilon_x) \subset U$$

を示せばよい. $x \in U$ とする. 実は $\varepsilon_x > 0$ としてどのような半径を選んでも $N(x; \varepsilon_x) \subset U$ となる. 例として $\varepsilon_x := 1$ とすると,

$$N(x; \varepsilon_x) \subset U (= \mathbb{R}^2)$$

である (実際 $y \in N(x; \varepsilon_x)$ とすると定義から $y \in \mathbb{R}^2$ である). 以上より $\mathbb{R}^2$ 自身は $\mathbb{R}^2$ の開集合である. $\square$

- (2) $U := N(a; 1)$ とおく. $\forall x \in U, \exists \varepsilon_x > 0$ s.t.

$$N(x; \varepsilon_x) \subset U$$

を示せばよい. $x \in U$ とする. $\varepsilon_x := 1 - d(x, a)$ とおくと, $x \in U = N(a; 1)$ より

$$d(x, a) < 1$$

なので, $\varepsilon_x > 0$ である. 最後にこの半径 ε_x で

$$N(x; \varepsilon_x) \subset U (= N(a; 1))$$

を示す. $y \in N(x; \varepsilon_x)$ とすると ε -近傍の定義より

$$d(y, x) < \varepsilon_x$$

三角不等式から

$$d(y, a) \leq d(y, x) + d(x, a) < \varepsilon_x + d(x, a) = 1$$

よって $y \in U = N(a, 1)$. 以上より

$$N(x; \varepsilon_x) \subset U$$

である. 以上より $N(a; 1)$ は $\mathbb{R}^2$ の開集合である. $\square$

(3) $U := \mathbb{R}^2 \setminus \{a\}$ とおく. $\forall x \in U, \exists \varepsilon_x > 0$ s.t.

$$N(x; \varepsilon_x) \subset U$$

を示せばよい. $x \in U$ とする. $\varepsilon_x := d(x, a)$ とおくと, $x \in U$ より $x \neq a$ なので, 距離の定義より

$$d(x, a) > 0$$

つまり, $\varepsilon_x > 0$ である. 最後にこの半径 ε_x で

$$N(x; \varepsilon_x) \subset U (= \mathbb{R}^2 \setminus \{a\})$$

を示す. $y \in N(x; \varepsilon_x)$ とすると ε -近傍の定義より

$$d(y, x) < \varepsilon_x$$

以上より

$$d(x, y) < \varepsilon_x = d(x, a).$$

よって距離の定義より $y \neq a$ なので $y \in U = \mathbb{R}^2 \setminus \{a\}$. 以上より

$$N(x; \varepsilon_x) \subset U$$

である. 以上より $\mathbb{R}^2 \setminus \{a\}$ は $\mathbb{R}^2$ の開集合である. □

問 2 次の (1) と (2) を証明せよ:

(1) U_λ を $\mathbb{R}^2$ の開集合とする (ただし $\lambda \in \Lambda$ とし Λ は添え字集合). このとき

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$$

も $\mathbb{R}^2$ の開集合である.

(2) $n \in \mathbb{N}$ とし, $U_1, U_2, \dots, U_n$ を $\mathbb{R}^2$ の開集合とする. このとき

$$U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_n$$

も $\mathbb{R}^2$ の開集合である.

解答例 (1) $U := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ とおく. $\forall x \in U, \exists \varepsilon_x > 0$ s.t.

$$N(x; \varepsilon_x) \subset U$$

を示せばよい. $x \in U$ とする. このとき和集合の定義から $\exists \lambda_0 \in \Lambda$ s.t.

$$x \in U_{\lambda_0}.$$

この選ばれた U_{λ_0} も開集合なので, $\exists \varepsilon_x > 0$ s.t.

$$N(x; \varepsilon_x) \subset U_{\lambda_0}.$$

さらに

$$U_{\lambda_0} \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda = U$$

である。以上より $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ は $\mathbb{R}^2$ の開集合である。 □

(2) $U := U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_n$ とおく。 $\forall x \in U, \exists \varepsilon_x > 0$ s.t.

$$N(x; \varepsilon_x) \subset U$$

を示せばよい。 $x \in U$ とする。このとき共通部分の定義より

$$\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad x \in U_k.$$

U_k はすべて開集合なので, $\exists \varepsilon_k > 0$ s.t.

$$N(x; \varepsilon_k) \subset U_k.$$

そこで, $\varepsilon_x := \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n\}$ とおくと, $\varepsilon_x > 0$ でさらに

$$N(x; \varepsilon_x) \subset N(x; \varepsilon_k)$$

が成立する (実際, $z \in N(x; \varepsilon_x)$ とすれば,

$$d(z, x) < \varepsilon_x \leq \varepsilon_k$$

なので, $z \in N(x; \varepsilon_k)$). よって

$$N(x; \varepsilon_x) \subset N(x; \varepsilon_k) \subset U_k.$$

すべての $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ に対してこれが成立しているので共通部分の定義から

$$N(x; \varepsilon_x) \subset U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_n = U$$

である。以上より $U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_n$ は $\mathbb{R}^2$ の開集合である。 □