2025/05/13/No.5

位相入門I・自習シート

問 1 $X = \mathbb{R}^2$ つまり平面のとき, $a, b \in X$ に対して $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$ とおき,

$$d_1(a, b) := |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|$$

と定義する (マンハッタン距離, L^1 距離). $a = (4, 0)$, $b = (4, 3)$, $c = (2, 2)$ のとき $d_1(a, b)$ の例をもとに, $d_1(b, c)$, $d_1(a, c)$ をそれぞれ求めよ.

$$d_1(a, b) = |4 - 4| + |0 - 3| = 3$$

解答例

$$d_1(b, c) = |4 - 2| + |3 - 2| = 2 + 1 = 3$$
$$d_1(a, c) = |4 - 2| + |0 - 2| = 2 + 2 = 4$$

問 2 $X := \{$ 高槻, 京都, 大津, 瀬田 $\}$ とする. それぞれ JR の駅を表すとし, その間の運賃は以下の通りとする.

A\B	高槻	京都	大津	瀬田
高槻	0	410	580	660
京都	410	0	200	320
大津	580	200	0	200
瀬田	660	320	200	0

$A, B \in X$ に対して $d(A, B)$ を上記表の値とする. 例えば A を高槻, B を京都とすると

$$d(\text{高槻}, \text{京都}) = 410$$

である. $d(\text{大津}, \text{大津})$, $d(\text{大津}, \text{瀬田})$, $d(\text{瀬田}, \text{大津})$ をそれぞれ求めよ.

$$d(\text{大津}, \text{大津}) = 0$$

$$d(\text{大津}, \text{瀬田}) = 200$$

$$d(\text{瀬田}, \text{大津}) = 200$$

注　現実世界では選んだ駅の集合 X によっては, 駅間の料金 d が必ずしも X の距離になるわけではない. 例えば X に大阪も入れてしまうと, 大阪–瀬田間は 960 円だが, 大阪–京都間 580 円, 京都–瀬田間 320 円つまり

$$d(\text{大阪}, \text{瀬田}) = 960,$$

$$d(\text{大阪}, \text{京都}) = 580, \quad d(\text{京都}, \text{瀬田}) = 320,$$

より

$$d(\text{大阪}, \text{瀬田}) = 960 > 900 = 580 + 320 = d(\text{大阪}, \text{京都}) + d(\text{京都}, \text{瀬田})$$

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと. 提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.

のように三角不等式を満たさない (なぜかは分からないが京都で途中下車した方が安いという状況が起こっている).

問 3 $X = \mathbb{R}^2$ のとき, $a, b \in X$ に対して $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$ とおき,

$$d_\infty(a, b) := \max\{|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|\}$$

と定義する (チェビシェフ距離, L^∞ 距離). $a = (4, 0)$, $b = (4, 3)$, $c = (2, 2)$ のとき $d_\infty(a, b)$ の例をもとに, $d_\infty(b, c)$, $d_\infty(a, c)$ をそれぞれ求めよ.

$$d_\infty(a, b) = \max\{|4 - 4|, |0 - 3|\} = 3$$

解答例

$$d_\infty(b, c) = \max\{|4 - 2|, |3 - 2|\} = 2$$

$$d_\infty(a, c) = \max\{|4 - 2|, |0 - 2|\} = 2$$

例題 $X = \mathbb{R}$ のとき,

$$d(x, y) := |x - y|$$

は $\mathbb{R}$ 上の距離である. 実際, 距離の定義 (D1) から (D3) を満たすことを示せばよい. $x, y \in X = \mathbb{R}$ とする.

$$d(x, y) = |x - y| \geq 0$$

また, $d(x, y) = 0$ ならば, $|x - y| = 0$ となり, $x = y$. 逆に $x = y$ ならば, $d(x, y) = |x - y| = 0$. よって (D1) が成立.

次に, $x, y \in X$ とする. $d(x, y) = |x - y| = |y - x| = d(y, x)$ より (D2) も成立.
最後に, $x, y, z \in X = \mathbb{R}$ とする. 三角不等式 [1] より

$$\begin{aligned} d(x, z) &= |x - z| \\ &= |x - y + y - z| \\ &\leq |x - y| + |y - z| \\ &= d(x, y) + d(y, z) \end{aligned}$$

よって (D3) も成立. つまり, d は $\mathbb{R}$ 上の距離である.
問 4 上記例題を元に $X = \mathbb{R}^2$ のとき, $a, b \in X$ に対して $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$ とおき,

$$d_1(a, b) := |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|$$

と定義する (マンハッタン距離, L^1 距離). d_1 は $\mathbb{R}^2$ の距離であることを示せ.

---

[1] 三角不等式は次のように証明できる.

$$\begin{aligned} (|x| + |y|)^2 - |x + y|^2 &= x^2 + 2|x||y| + y^2 - (x^2 + 2xy + y^2) \\ &= 2|xy| - 2xy \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

より $|x + y| \leq |x| + |y|$.

解答例　$x=(x_1,x_2), y=(y_1,y_2)\in X=\mathbb{R}^2$ とする.

$$d_1(x,y)=|x_1-y_1|+|x_2-y_2|\geq 0$$

また, $d_1(x,y)=0$ ならば, $|x_1-y_1|+|x_2-y_2|=0$ となり, $|x_1-y_1|=0$ かつ $|x_2-y_2|=0$ である. よって $x_1=y_1$ かつ $x_2=y_2$ であるので $x=y$. 逆に $x=y$ ならば, $d_1(x,y)=|x_1-y_1|+|x_2-y_2|=0$. よって (D1) が成立.

次に, $d_1(x,y)=|x_1-y_1|+|x_2-y_2|=|y_1-x_1|+|y_2-x_2|=d_1(y,x)$ より (D2) も成立.

最後に,

$$\begin{aligned}
d_1(x,z)&=|x_1-z_1|+|x_2-z_2|\\
&=|x_1-y_1+y_1-z_1|+|x_2-y_2+y_2-z_2|\\
&\leq|x_1-y_1|+|y_1-z_1|+|x_2-y_2|+|y_2-z_2|\\
&=d_1(x,y)+d_1(y,z)
\end{aligned}$$

よって (D3) も成立. つまり, d_1 は $\mathbb{R}^2$ 上の距離である.