

位相入門I・自習シート

問1 $E_1 \subset \mathbb{R}, E_2 \subset \mathbb{R}$ とし, それぞれ E_1 と E_2 は空ではない有界な集合とする. (1)–(2) を証明せよ.

(1) $E := \{x + y \in \mathbb{R} : x \in E_1, y \in E_2\}$ とおく¹⁾. このとき

$$\inf E \geq \inf E_1 + \inf E_2$$

解答例 $\alpha := \inf E_1, \beta := \inf E_2$ とおく. 最大下界 (下限) の定義より,

$$\forall x \in E_1, x \geq \alpha \quad \text{かつ} \quad \forall y \in E_2, y \geq \beta.$$

ここで, E の定義より $\forall x \in E, \exists x_z \in E_1, \exists y_z \in E_2$ s.t.

$$z = x_z + y_z$$

なので²⁾

$$z = x_z + y_z \geq \alpha + \beta.$$

つまり, $\alpha + \beta$ は E の下界の1つである. 一方, $\inf E$ は E の最大下界なので

$$\inf E \geq \alpha + \beta = \inf E_1 + \inf E_2.$$

(2) $-E_1 := \{-x \in \mathbb{R} : x \in E_1\}$ ³⁾ とおく. このとき

$$\sup(-E_1) = -\inf E_1.$$

解答例 $\alpha := \sup(-E_1)$ とおく. 最小上界 (上限) の定義より

$$\begin{cases} \text{(i)} & \forall x \in (-E_1), x \leq \alpha; \\ \text{(ii)} & \forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in (-E_1) \text{ s.t. } \alpha - \varepsilon < x_\varepsilon. \end{cases}$$

ここで, $\forall y \in E_1, -y \in (-E_1)$ なので (i) より

$$-y \leq \alpha,$$

つまり

$$y \geq -\alpha$$

を満たす. 次に (ii) より $\forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in (-E_1) \text{ s.t. } \alpha - \varepsilon < x_\varepsilon$. つまり

$$-\alpha + \varepsilon > -x_\varepsilon.$$

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点しておくこと. 提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.

¹⁾ いいかえると $E = \{z \in \mathbb{R} : \exists x \in E_1, \exists y \in E_2 \text{ s.t. } z = x + y\}$

²⁾ E の元 z は必ず E_1 の元と E_2 の元の和で書けるというのが E の定義.

³⁾ いいかえると $-E_1 := \{z \in \mathbb{R} : \exists x \in E_1 \text{ s.t. } z = -x\}$

ここで, $-x_\varepsilon \in E_1$ なので, $y_\varepsilon := -x_\varepsilon$ とおけば, 以上をまとめると

$$\begin{cases} \text{(i)} & \forall y \in E_1, y \geq -\alpha; \\ \text{(ii)} & \forall \varepsilon > 0, \exists y_\varepsilon \in E_1 \text{ s.t. } -\alpha + \varepsilon > y_\varepsilon. \end{cases}$$

と言える. つまり $-\alpha$ は E_1 の最大下界であるので

$$-\alpha = \inf E_1,$$

つまり

$$\alpha = -\inf E_1.$$

□

問 2 $A, B \subset \mathbb{R}$ を空でない有界集合とする. このとき次を証明せよ.

$$(1) \inf A \leq \sup A.$$

$$(2) \forall a \in A, \forall b \in B, a \leq b \text{ が成立するならば } \sup A \leq \inf B.$$

$$(3) \forall a \in A, \exists b_a \in B \text{ s.t. } a \leq b_a \text{ が成立するならば } \sup A \leq \sup B.$$

解答例 (1) $x \in A$ とする. $\sup A$ と $\inf A$ の定義より,

$$\inf A \leq x, \quad x \leq \sup A.$$

つまり, $\inf A \leq \sup A$.

□

(2) 仮定より, $a \in A$ とすると次が成立する:

$$\forall b \in B, a \leq b.$$

よって a は B の下界の 1 つである. 一方 $\inf B$ は B の最大下界なので

$$a \leq \inf B$$

が成立する. 次に $a \in A$ は任意に選べるので, 上の式より $\inf B$ は A の上界の 1 つである. 一方 $\sup A$ は最小上界であったので

$$\sup A \leq \inf B$$

を得る.

□

(3) $\sup B$ の定義より

$$\forall b \in B, b \leq \sup B.$$

仮定より, $\forall a \in A, \exists b_a \in B$ s.t.

$$a \leq b_a$$

であるが, $b_a \in B$ より

$$a \leq b_a \leq \sup B$$

を得る. よって, $\sup B$ は A の上界の 1 つである. 一方 $\sup A$ は最小上界であったので

$$\sup A \leq \sup B$$

を得る.

□

注 (2) と (3) の証明の違いをはっきりと理解すべきである. (3) の証明中,

$$\forall a \in A, \exists b_a \in B, \text{ s.t. } a \leq b_a$$

が成立するからと言って, b_a が A の上界の 1 つとは言えないことに注意が必要. b_a は a に依存して決まる値である. a が変われば b_a も変わってしまうので b_a がどのような $a \in A$ をも上から押さえる値 (A の上界) とは言えない. a に依存しないそれより大きな $\sup B$ が A の上界の 1 つであると言っている.

問 3 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を数列, α, c をそれぞれ実数とする. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ を満たすと仮定する. このとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c a_n = c \alpha \quad (*)$$

を ε - N 論法で証明したい. 次の問いに答えよ.

(1) ε - N 論法による $(*)$ の定義をかけ.

解答例 $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ s.t.}$

$$\forall n \geq N_\varepsilon, |c a_n - c \alpha| < \varepsilon.$$

(2) $c = 0$ のときを考える. $\varepsilon > 0$ とする. この場合, $\forall n \geq 1, |c a_n - c \alpha| < \varepsilon$ であることを確かめよ.

解答例 $\varepsilon > 0$ とする. $c = 0$ より, $c a_n = 0, c \alpha = 0$ なので,

$$\forall n \geq 1, |c a_n - c \alpha| = |0 - 0| = 0 < \varepsilon.$$

注: つまり $a_n = 0$ で定義される数列が 0 に収束することを ε - N 論法で厳密に証明したことになる. ずっと 0 である数列が 0 に収束することなど当たり前のような気がするが, じゃあ「証明せよ」といわれたら, 「当たり前だ」では済まないわけで... このような水掛け論を避けるためにも厳密な定義による合意形成が必要だ. それが ε - N 論法だ.

(3) $c \neq 0$ のときを考える. $(*)$ を ε - N 論法で証明せよ.

解答例

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ s.t.}$$

$$\forall n \geq N_\varepsilon, |c a_n - c \alpha| < \varepsilon$$

を示せばよい. $\varepsilon > 0$ とする. $c \neq 0$ から $\varepsilon/|c| > 0$ なので, 仮定 $a_n \rightarrow \alpha$ より, $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ s.t.}$

$$\forall n \geq N_\varepsilon, |a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{|c|}.$$

よって,

$$\forall n \geq N_\varepsilon, |c a_n - c \alpha| = |c| |a_n - \alpha| < |c| \frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon.$$

注: 上記 (2) と (3) からこれら場合分けによって, $(*)$ が ε - N 論法で証明できた. しかし $c = 0, c \neq 0$ の場合分けなしに, 次のような工夫で $(*)$ が証明できる.

別解

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ s.t.}$$

$$\forall n \geq N_\varepsilon, |ca_n - c\alpha| < \varepsilon$$

を示せばよい. $\varepsilon > 0$ とする. 仮定 $a_n \rightarrow \alpha$ より, $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t.

$$\forall n \geq N_\varepsilon, |a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{1 + |c|}.$$

よって,

$$\begin{aligned} \forall n \geq N_\varepsilon, |ca_n - c\alpha| &= |c||a_n - \alpha| \\ &\leq (1 + |c|)|a_n - \alpha| \\ &< (1 + |c|)\frac{\varepsilon}{1 + |c|} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

注: $|c| = 0$ になる場合であっても $1 + |c| > 0$ を考えることで 0 で割ることを回避している.

問 4 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を数列, α を実数とする. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ を満たすと仮定する. このとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |\alpha|$$

を ε - N 論法で証明せよ⁴⁾.

解答例

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ s.t.}$$

$$\forall n \geq N_\varepsilon, ||a_n| - |\alpha|| < \varepsilon$$

を示せばよい. $\varepsilon > 0$ とする. 仮定 $a_n \rightarrow \alpha$ より, $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t.

$$\forall n \geq N_\varepsilon, |a_n - \alpha| < \varepsilon.$$

よって,

$$\begin{aligned} \forall n \geq N_\varepsilon, ||a_n| - |\alpha|| &\leq |a_n - \alpha| \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

問 5 例題を参考に, 一般項が次の様に与えられた数列 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ の 0 への収束を ε - N 論法で証明せよ.

(例題) $a_n := \frac{1}{n}$

解答例

⁴⁾任意の実数 $r, s \in \mathbb{R}$ に対して $||r| - |s|| \leq |r - s|$ が成立することを用いるとよい.

$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t.

$$\forall n \geq N_\varepsilon, \left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon$$

を示せばよい. そこで先に

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

となる番号を見積もっておくと

$$\frac{1}{n} < \varepsilon,$$

$$\frac{1}{\varepsilon} < n$$

となる番号であればよい.

$\varepsilon > 0$ とする. アルキメデスの原理⁵⁾より $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t.

$$\frac{1}{\varepsilon} < N_\varepsilon.$$

このとき, $\forall n \geq N_\varepsilon$ に対して

$$\frac{1}{\varepsilon} < N_\varepsilon \leq n$$

より

$$\frac{1}{n} < \varepsilon.$$

よって,

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

以上により

$$a_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow +\infty).$$

$$(1) \ a_n := \frac{1}{\sqrt{n}}$$

解答例

⁵⁾ 「自然数は上に有界ではない」という定理.

$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ s.t.}$

$$\forall n \geq N_\varepsilon, \left| \frac{1}{\sqrt{n}} - 0 \right| < \varepsilon$$

を示せばよい. そこで先に

$$\left| \frac{1}{\sqrt{n}} - 0 \right| = \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$$

となる番号を見積もっておくと

$$\frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon,$$

$$\frac{1}{\varepsilon^2} < n$$

となる番号であればよい.

$\varepsilon > 0$ とする. アルキメデスの原理より $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ s.t.}$

$$\frac{1}{\varepsilon^2} < N_\varepsilon.$$

このとき $\forall n \geq N_\varepsilon$ に対して

$$\frac{1}{\varepsilon^2} < N_\varepsilon \leq n$$

より

$$\frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon.$$

よって,

$$\left| \frac{1}{\sqrt{n}} - 0 \right| = \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon.$$

以上により

$$a_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow +\infty).$$

(2) $a_n := \frac{1}{2^n}$

解答例

$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ s.t.}$

$$\forall n \geq N_\varepsilon, \left| \frac{1}{2^n} - 0 \right| < \varepsilon$$

を示せばよい. そこで先に

$$\left| \frac{1}{2^n} - 0 \right| < \varepsilon$$

となる番号を見積もっておくと

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2^n} - 0 \right| &= \frac{1}{2^n} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

となる番号であればよい.

$\varepsilon > 0$ とする. アルキメデスの原理より $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ s.t.}$

$$\log_2 \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) < N_\varepsilon.$$

このとき, $\forall n \geq N_\varepsilon$ に対して

$$\log_2 \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) \leq N_\varepsilon \leq n$$

より

$$\frac{1}{\varepsilon} < 2^n,$$

つまり

$$\frac{1}{2^n} < \varepsilon.$$

よって,

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2^n} - 0 \right| &= \frac{1}{2^n} \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

以上により

$$a_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow +\infty).$$

別解

$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t.

$$\forall n \geq N_\varepsilon, \left| \frac{1}{2^n} - 0 \right| < \varepsilon$$

を示せばよい. そこで先に

$$\left| \frac{1}{2^n} - 0 \right| < \varepsilon$$

となる番号を見積もっておくと, $\forall n \in \mathbb{N}, n < 2^n$ より

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2^n} - 0 \right| &= \frac{1}{2^n} \\ &< \frac{1}{n} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

となる番号であればよい.

$\varepsilon > 0$ とする. アルキメデスの原理より $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t.

$$\frac{1}{\varepsilon} < N_\varepsilon.$$

このとき, $\forall n \geq N_\varepsilon$ に対して

$$\frac{1}{\varepsilon} \leq N_\varepsilon \leq n$$

より

$$\frac{1}{n} < \varepsilon.$$

よって,

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2^n} - 0 \right| &= \frac{1}{2^n} \\ &< \frac{1}{n} \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

以上により

$$a_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow +\infty).$$