2025/05/20/No.3

位相入門I・自習シート

問 1 $E \subset \mathbb{R}$ とし, 下に有界であるとする. 次の同値性を証明せよ.

$$\beta = \inf E \iff \begin{cases} \text{(i)}{}^\forall x \in E, x \geq \beta; \\ \text{(ii)}{}^\forall \varepsilon > 0, {}^\exists x_\varepsilon \in E \text{ s.t. } \beta + \varepsilon > x_\varepsilon. \end{cases}$$

解答例 ($\Longrightarrow$) を示す. β を E の最大下界と仮定する. β は E の下界の 1 つなので, 下界の定義から (i) が成立する. 次に (ii) を背理法で示す. もし (ii) が成立しないならば,

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \boxed{\exists x_\varepsilon \in E \ \boxed{\beta + \varepsilon > x_\varepsilon}}}$$

の否定から

$$\boxed{\exists \varepsilon > 0 \ \boxed{\forall x \in E \ \boxed{\beta + \varepsilon \leq x}}}$$

よって, ${}^\exists \varepsilon > 0$ s.t. ${}^\forall x \in E$, $\beta + \varepsilon \leq x$ が成立する, つまり $\beta + \varepsilon$ も E の下界の 1 つとなる. 一方 $\beta < \beta + \varepsilon$ なので $\beta + \varepsilon$ は β より大きな E の下界となり, β が E の最大下界であることに矛盾する. よって (ii) が成立する.

($\Longleftarrow$) を示す. β は (i), (ii) を満たすとを仮定する. (i) より下界の定義から β は E の下界の 1 つである. 次に, β は E の下界の中で最大であることを背理法で示す. もし成立しないならば, $\beta < \beta_0$ を満たす E の下界 β_0 が存在する. そこで, (ii) より

$${}^\forall \varepsilon > 0, {}^\exists x_\varepsilon \in E \text{ s.t. } \beta + \varepsilon > x_\varepsilon$$

が成立しているが, $\varepsilon := \beta_0 - \beta > 0$ でも成り立つので

$${}^\exists x_0 \in E \text{ s.t. } \beta + \varepsilon > x_0,$$

$$\beta + (\beta_0 - \beta) > x_0,$$

$$\beta_0 > x_0.$$

つまり, β_0 が E の下界であることに矛盾する. よって β が E の最大下界である. □

問 2 $E_1 \subset E_2 \subset \mathbb{R}$ とし, 下に有界とする. このとき

$$\inf E_1 \geq \inf E_2$$

を証明せよ.

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと. 提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.

解答例　$\beta := \inf E_2$ とおく．β は E_2 の最大下界なので

$$^\forall x \in E_2, x \geq \beta$$

を満たす．そこで, $y \in E_1$ とする．このとき仮定 $E_1 \subset E_2$ より $y \in E_2$ であるので

$$y \geq \beta$$

を満たす．y は任意に選べるので, これは β が E_1 の下界の 1 つであることを意味する．一方, $\inf E_1$ は E_1 の最大下界なので

$$\inf E_1 \geq \beta = \inf E_2.$$

□

問 3 $E_1 \subset \mathbb{R}, E_2 \subset \mathbb{R}$ とし, 上に有界とする．

$$E := \{x + y : x \in E_1, y \in E_2\}$$

とおく．このとき

$$\sup E \leq \sup E_1 + \sup E_2$$

を証明せよ．

解答例　E の定義から $^\forall z \in E$, $^\exists x_z \in E_1$, $^\exists y_z \in E_2$ s.t.

$$z = x_z + y_z$$

とかけている．いま, $\alpha := \sup E_1$, $\beta := \sup E_2$ とおくと最小上界の定義 (同値条件) より

$$x_z \leq \alpha, \quad y_z \leq \beta$$

を満たす．よって

$$z = x_z + y_z \leq \alpha + \beta$$

を満たす．z は任意に選べるので, これは $\alpha + \beta$ が E の上界の 1 つであることを意味する．一方, $\sup E$ は E の最小上界なので

$$\sup E \geq \alpha + \beta = \sup E_1 + \sup E_2.$$

□