2025/04/15/No.2

位相入門I・自習シート

問 1 $E \subset \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ とする．例題をもとに次の命題の否定を論理式で述べよ．

(例 1) $\forall x \in E,\ x \leq \alpha.$

解答例　$\exists x \in E$ s.t. $x > \alpha.$

考え方 1　$\forall x \in E,\ x \leq \alpha$ とは「すべての $x \in E$ に対して $x \leq \alpha$」という意味である．これを否定すると「$x \leq \alpha$ を満たさない反例が E に存在する」ということなので「ある $x \in E$ が存在して $x > \alpha$」となる．よって

$$\exists x \in E \text{ s.t. } x > \alpha$$

となる．

考え方 2　機械的に「$\forall$」や「$\exists$— s.t.」と最後の命題 P の区切りごとに箱で分けて考えると

$$\boxed{\forall x \in E\ \boxed{x \leq \alpha}}$$

となる．ここで最後の命題 P とは $x \leq \alpha$ の部分を意味する．この否定

$$\neg\ \boxed{\forall x \in E\ \boxed{x \leq \alpha}}$$

は (ただし $\neg$ の記号は否定を表す記号である), 機械的に「$\forall$」を「$\exists$」に,「$\exists$」を「$\forall$」に入れ換え, 最後の命題 P を否定することで, 次のように得られる．

$$\boxed{\exists x \in E\ \boxed{x > \alpha}}$$

よってこれを書き直して ($\exists$ の最後に付く「s.t.」を付け加えて)

$$\exists x \in E \text{ s.t. } x > \alpha$$

となる．

(例 2) $\exists y \in E$ s.t. $y \geq \beta.$

解答例　$\forall y \in E,\ y < \beta.$

考え方 1　$\exists y \in E$ s.t. $y \geq \beta$ とは「ある $y \in E$ が存在して $y \geq \beta$」という意味である．これを否定すると「$y \geq \beta$ を満たすような E の元 y は存在しない」ということなので「すべての $y \in E$ に対して $y < \beta$」となる．よって

$$\forall y \in E,\ y < \beta$$

となる．

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと．提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です．

考え方 2　機械的に「∀」や「∃— s.t.」と最後の命題 P の区切りごとに箱で分けて考えると (s.t. は省略する)

$$\boxed{\exists y \in E \ \boxed{y \geq \beta}}$$

となる．ここで最後の命題 P とは $y \geq \beta$ の部分を意味する．この否定

$$\neg \ \boxed{\exists y \in E \ \boxed{y \geq \beta}}$$

は, 機械的に「∀」を「∃」に,「∃」を「∀」に入れ換え, 最後の命題 P を否定することで,

$$\boxed{\forall y \in E \ \boxed{y < \beta}}$$

となる．よって

$$\forall y \in E, y < \beta$$

となる．

(1) $\exists k \in \mathbb{Z}$ s.t. $\alpha = 2k$.

解答例　$\forall k \in \mathbb{Z}, \alpha \neq 2k$.

考え方　機械的に「∀」や「∃— s.t.」と最後の命題 P の区切りごとに箱で分けて考えると

$$\boxed{\exists k \in \mathbb{Z} \ \boxed{\alpha = 2k}}$$

となる．この否定

$$\neg \ \boxed{\exists k \in \mathbb{Z} \ \boxed{\alpha = 2k}}$$

は, 機械的に「∀」を「∃」に,「∃」を「∀」に入れ換え, 最後の命題 P を否定することで,

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{Z} \ \boxed{\alpha \neq 2k}}$$

となる．よって

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \alpha \neq 2k$$

となる．

(2) $\forall x \in E, \exists k \in \mathbb{Z}$ s.t. $x = 2k$.

解答例　$\exists x \in E$ s.t. $\forall k \in \mathbb{Z}, x \neq 2k$.

考え方　機械的に「∀」や「∃— s.t.」と最後の命題 P の区切りごとに箱で分けて考えると

$$\boxed{\forall x \in E \ \boxed{\exists k \in \mathbb{Z} \ \boxed{x = 2k}}}$$

となる．この否定

$$\neg \ \boxed{\forall x \in E \ \boxed{\exists k \in \mathbb{Z} \ \boxed{x = 2k}}}$$

は, 機械的に「∀」を「∃」に, 「∃」を「∀」に入れ換え, 最後の命題 P を否定することで,

$$\boxed{\exists x \in E \ \boxed{\forall k \in \mathbb{Z} \ \boxed{x \neq 2k}}}$$

となる. よって

$\exists x \in E$ s.t. $\forall k \in \mathbb{Z}$, $x \neq 2k$

となる.

(3) $\forall x \in E$, $\alpha - 1 \geq x$.

解答例　$\exists x \in E$ s.t. $\alpha - 1 < x$.

考え方　機械的に「∀」や「∃— s.t.」と最後の命題 P の区切りごとに箱で分けて考えると

$$\boxed{\forall x \in E \ \boxed{\alpha - 1 \geq x}}$$

となる. この否定

$$\neg \ \boxed{\forall x \in E \ \boxed{\alpha - 1 \geq x}}$$

は, 機械的に「∀」を「∃」に, 「∃」を「∀」に入れ換え, 最後の命題 P を否定することで,

$$\boxed{\exists x \in E \ \boxed{\alpha - 1 < x}}$$

となる. よって

$\exists x \in E$ s.t. $\alpha - 1 < x$

となる.

(4) $\exists \varepsilon > 0$ s.t. $\forall x \in E$, $\alpha - \varepsilon \geq x$.

解答例　$\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in E$ s.t. $\alpha - \varepsilon < x$.

考え方　機械的に「∀」や「∃— s.t.」と最後の命題 P の区切りごとに箱で分けて考えると

$$\boxed{\exists \varepsilon > 0 \ \boxed{\forall x \in E \ \boxed{\alpha - \varepsilon \geq x}}}$$

となる. この否定

$$\neg \ \boxed{\exists \varepsilon > 0 \ \boxed{\forall x \in E \ \boxed{\alpha - \varepsilon \geq x}}}$$

は, 機械的に「∀」を「∃」に, 「∃」を「∀」に入れ換え, 最後の命題 P を否定することで,

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \boxed{\exists x \in E \ \boxed{\alpha - \varepsilon < x}}}$$

となる. よって

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in E$ s.t. $\alpha - \varepsilon < x$

となる.

問 2 次の集合 $E \subset \mathbb{R}$ に対して $\sup E$, $\inf E$ をそれぞれ求めよ.

(1) $E = (0, 1)$

解答例　$\sup E = 1$, $\inf E = 0$.

(2) $E = [0, 1] \cup (2, 3)$

解答例　$\sup E = 3$, $\inf E = 0$.

(3) $E = [0, +\infty)$

解答例　$\sup E = +\infty$, $\inf E = 0$.