

令和7年度 微分方程式Ⅱ 小テスト No.1

_____ 課程 _____ 年生 学籍番号 _____ 名前 _____

1 $a, x_0 \in \mathbb{R}$ とする. $x = x(t)$ に対する次の微分方程式の初期値問題について以下の問いに答えよ.

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) & (t > 0) & \cdots \text{(i)} \\ x(0) = x_0 & (t = 0) & \cdots \text{(ii)} \end{cases}$$

(1) (i) を求積法によってを解き, 一般解が定数 C を用いて $x(t) = Ce^{at}$ となることを確かめよ.

(2) (i)–(ii) の特解を求めよ.

(1) $x \neq 0$ とすると

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} \frac{dx}{dt} &= a, \\ \int \frac{1}{x} \frac{dx}{dt} dt &= \int a dt, \\ \log |x| &= at + C_1, \\ |x| &= e^{at+C_1} = e^{at} e^{C_1}, \\ x &= \pm e^{C_1} e^{at}, \\ x &= C e^{at}. \end{aligned}$$

$x = 0$ も解だが, 上の形で $C = 0$ とすれば表現できる. よって一般解は

$$x = x(t) = C e^{at}.$$

(2) (ii) から C を求めればよい. $t = 0$ を代入すると

$$\begin{aligned} x(0) &= C e^0 \\ &= C. \end{aligned}$$

よって, 初期条件 $x(0) = x_0$ より $C(0) = x_0$ が得られるので特解は

$$x(t) = x_0 e^{at}$$

で求められる. □

2 d を自然数とし, A を d 次正方行列とする. 行列 S_N を

$$S_N := I + A + \frac{1}{2!} A^2 + \frac{1}{3!} A^3 + \cdots + \frac{1}{N!} A^N \quad (N \in \mathbb{N})$$

で定義する. このとき, $\{S_N\}$ はコーシー列であることを示すことで, S_N はある n 次正方行列 S に収束することを証明せよ. ただし, 行列 A に対するノルムは次のフロベニウスノルム

$$\|A\| := \sqrt{\sum_{i,j=1}^d |a_{ij}|^2}, \quad A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1d} \\ a_{21} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{d1} & a_{d2} & \cdots & a_{dd} \end{pmatrix}$$

を用いる. またノルムの定義と共に性質 $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ を用いてもよい.

まず,

$$T_N := 1 + \|A\| + \frac{1}{2!} \|A\|^2 + \cdots + \frac{1}{N!} \|A\|^N$$

とおく. このとき, T_N は $e^{\|A\|}$ の N 次近似式なのでこの数列 $\{T_N\}$ は $e^{\|A\|}$ に収束する. そこで, $M, N \in \mathbb{N} : N > M$ とすると

$$\begin{aligned} \|S_N - S_M\| &= \left\| \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} A^k - \sum_{k=0}^M \frac{1}{k!} A^k \right\| \\ &= \left\| \sum_{k=M+1}^N \frac{1}{k!} A^k \right\| \\ &\leq \sum_{k=M+1}^N \frac{1}{k!} \|A^k\| \\ &\leq \sum_{k=M+1}^N \frac{1}{k!} \|A\|^k \\ &= |T_N - T_M|. \end{aligned}$$

ここで, 数列 $\{T_N\}$ は収束するので, コーシー列である. よって

$$\|S_N - S_M\| \leq |T_N - T_M| \rightarrow 0 \quad (N, M \rightarrow +\infty).$$

これより, 行列 $\{S_N\}$ も収束する. □

□4 n を自然数とし, A, B を d 次正方行列とする. $AB = BA$ を仮定すると

$$e^A e^B = e^{A+B}$$

が成立することを証明せよ. ただし, □4 についてはフロベニウスノルムを用いて証明する必要は無く, 無限の項の順序交換は形式的に認めて計算してもよい. また, 二項定理

$${}_N C_k := \frac{N!}{k!(N-k)!}$$

を用いてもよい.

$AB = BA$ より

$$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + 2AB + B^2,$$

$$(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3,$$

$$(A+B)^N = \sum_{k=0}^N {}_N C_k A^k B^{N-k}$$

を得る. よって

$$\begin{aligned} e^{A+B} &= I + (A+B) + \frac{1}{2!}(A+B)^2 + \frac{1}{3!}(A+B)^3 \\ &\quad + \frac{1}{4!}(A+B)^4 + \cdots + \frac{1}{N!}(A+B)^N + \cdots \\ &= I + (A+B) + \frac{1}{2!}(A^2 + 2AB + B^2) \\ &\quad + \frac{1}{3!}(A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3) \\ &\quad + \frac{1}{4!}(A^4 + 4A^3B + 6A^2B^2 + 4AB^3 + B^4) \\ &\quad + \cdots + \frac{1}{N!} \sum_{k=0}^N {}_N C_k A^k B^{N-k} + \cdots \\ &= I + (A+B) + \left(\frac{1}{2!}A^2 + AB + \frac{1}{2!}B^2 \right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{3!}A^3 + \frac{1}{2!}A^2B + \frac{1}{2!}AB^2 + \frac{1}{3!}B^3 \right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{4!}A^4 + \frac{1}{3!}A^3B + \frac{1}{2!}A^2 \frac{1}{2!}B^2 + \frac{1}{3!}B^3A + \frac{1}{4!}B^4 \right) \\ &\quad + \cdots + \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} A^k \frac{1}{(N-k)!} B^{N-k} + \cdots \\ &= I \left(I + B + \frac{1}{2!}B^2 + \cdots + \frac{1}{N!}B^N + \cdots \right) \\ &\quad + A \left(I + B + \frac{1}{2!}B^2 + \cdots + \frac{1}{N!}B^N + \cdots \right) \\ &\quad + \frac{1}{2!}A^2 \left(I + B + \frac{1}{2!}B^2 + \cdots + \frac{1}{N!}B^N + \cdots \right) \\ &\quad + \cdots + \frac{1}{N!}A^N \left(I + B + \frac{1}{2!}B^2 + \cdots + \frac{1}{N!}B^N + \cdots \right) + \cdots \\ &= \left(I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \cdots + \frac{1}{N!}A^N + \cdots \right) \\ &\quad \times \left(I + B + \frac{1}{2!}B^2 + \cdots + \frac{1}{N!}B^N + \cdots \right) \\ &= e^A e^B. \end{aligned}$$

よって形式的ではあるが $e^A e^B = e^{A+B}$ が示された. □

□3 O を d 次零行列, I を d 次単位行列とする. このとき

$$e^O = I$$

を証明せよ. ただし, □3 についてはフロベニウスノルムを用いて証明する必要は無い.

全ての $N \in \mathbb{N}$ に対して $O^N = O$ であることに注意して

$$e^O = I + O + \frac{1}{2!}O^2 + \frac{1}{3!}O^3 + \cdots + \frac{1}{N!}O^N + \cdots = I.$$

よって, 形式的ではあるが $e^O = I$ が示された. □

□5 A を d 次正方行列とする. このとき e^A は逆行列をもち, $(e^A)^{-1} = e^{-A}$ が成立することを証明せよ. ただし, 証明には□3と□4の結果を用いてもよい.

A と $-A$ について, $A(-A) = (-1)AA = (-A)A$ より可換であるので□4を用いれば

$$e^A e^{-A} = e^{A+(-A)} = e^O$$

が得られる. また, □3より $e^O = I$ なので, $e^A e^{-A} = I$ となり, e^A は正方行列なので e^{-A} が e^A の逆行列であることを意味する. □