令和7年度 微分方程式II 小テスト No.1

__________ 課程 __________ 年生　学籍番号 __________ 名前 ________________

$\boxed{1}$ $a, x_0 \in \mathbb{R}$ とする． $x = x(t)$ に対する次の微分方程式の初期値問題について以下の問いに答えよ．

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) & (t > 0) & \cdots \text{(i)} \\ x(0) = x_0 & (t = 0) & \cdots \text{(ii)} \end{cases}$$

(1) (i) を求積法によってを解き，一般解が定数 C を用いて $x(t) = Ce^{at}$ となることを確かめよ．

(2) (i)–(ii) の特解を求めよ．

$\boxed{2}$ d を自然数とし, A を d 次正方行列とする．行列 S_N を

$$S_N := I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \cdots + \frac{1}{N!}A^N \quad (N \in \mathbb{N})$$

で定義する．このとき, $\{S_N\}$ はコーシー列であることを示すことで, S_N はある n 次正方行列 S に収束することを証明せよ．ただし, 行列 A に対するノルムは次のフロベニウスノルム

$$\|A\| := \sqrt{\sum_{i,j=1}^{d} |a_{ij}|^2}, \quad A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1d} \\ a_{21} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{d1} & a_{d2} & \cdots & a_{dd} \end{pmatrix}$$

を用いる．またノルムの定義と共に性質 $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ を用いてもよい．

$\boxed{4}$ n を自然数とし, A, B を d 次正方行列とする. $AB = BA$ を仮定すると

$$e^A e^B = e^{A+B}$$

が成立することを証明せよ. ただし, $\boxed{4}$ についてはフロベニウスノルムを用いて証明する必要は無く, 無限の項の順序交換は形式的に認めて計算してもよい. また, 二項定理

$${}_N\mathrm{C}_k := \frac{N!}{k!(N-k)!}$$

を用いてもよい.

$\boxed{3}$ O を d 次零行列, I を d 次単位行列とする. このとき

$$e^O = I$$

を証明せよ. ただし, $\boxed{3}$ についてはフロベニウスノルムを用いて証明する必要は無い.

$\boxed{5}$ A を d 次正方行列とする. このとき e^A は逆行列をもち, $(e^A)^{-1} = e^{-A}$ が成立することを証明せよ. ただし, 証明には $\boxed{3}$ と $\boxed{4}$ の結果を用いてもよい.