

微分方程式 II・自習シート

問 1

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

とし, $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ なる連立方程式を考える. $\lambda = 2$ について

$$A\mathbf{x} = 2\mathbf{x}$$

は次の連立方程式を意味する:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 2x_1, \\ 2x_1 + x_2 = 2x_2. \end{cases}$$

そこから $x_1 = 0, x_2 = 0$ が得られるので, $\mathbf{x} = {}^T(0, 0)$ となる. $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ は固有ベクトルとは言わないので, $\lambda = 2$ は A の固有値ではない¹⁾.

次の問いに答えよ.

- (1) $\lambda = 1, \lambda = 5, \lambda = 0$ はそれぞれ A の固有値か否か調べよ.
- (2) (1) から得られた固有値 λ に対する固有ベクトルをすべて求めよ.
- (3) $(A - 1I)^{-1}, (A - 5I)^{-1}, (A - 0I)^{-1}$ が存在するか否か調べよ.

注: λ が A の固有値であることと $A - \lambda I$ が逆行列を持たないことは同値.

問 2 n 次正方行列 A に対して λ が A の固有値になるための必要十分条件は $A - \lambda I$ が正則ではない, つまり逆行列を持たないことである. 例題を参考に次の行列の固有値と対応する固有ベクトルをそれぞれ求めよ.

例題

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$A - \lambda I$ について

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - \lambda & 4 \\ 2 & 1 - \lambda \end{pmatrix}$$

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと. 提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.

¹⁾固有値とは $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ に $\mathbf{0}$ 以外の解 $\mathbf{x}$ が存在するような λ のこと.

が逆行列を持たないための必要十分条件は行列式 $\det(A - \lambda I) = 0$ なので

$$(3 - \lambda)(1 - \lambda) - 8 = 0.$$

これを解いて

$$(\lambda - 3)(\lambda - 1) - 8 = 0,$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 - 8 = 0,$$

$$\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0,$$

$$(\lambda - 5)(\lambda + 1) = 0,$$

$$\lambda = 5, -1.$$

以上より A の固有値は $\lambda = 5$ と $\lambda = -1$. $\lambda = 5$ のとき,

$$A - 5I = \begin{pmatrix} 3-5 & 4 \\ 2 & 1-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

よって

$$(A - 5I)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を満たす $\mathbf{x}$ は

$$2x_1 - 4x_2 = 0$$

すなわち, $\lambda = 5$ に対応する固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

である. $\lambda = -1$ のとき,

$$A - (-1)I = \begin{pmatrix} 3-(-1) & 4 \\ 2 & 1-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

よって

$$(A - (-1)I)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を満たす $\mathbf{x}$ は

$$4x_1 + 4x_2 = 0$$

すなわち, $\lambda = -1$ に対応する固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

である.

(1)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(2)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(3)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(4)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

問3 A を n 次正方行列

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

とし, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ を A の固有値とする. ただし, 固有値が重複する場合にはその分だけ分けておき固有値の個数を n 個になるようにしておく. このとき次が成立することを, $n=2$ のときを参考にして $n=3$ のときを証明せよ:

(i) $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \cdots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \cdots + a_{nn}$ ($= \text{tr} A$ とかき A のトレースと呼ぶ);

(ii) $\lambda_1 \times \lambda_2 \times \lambda_3 \cdots \times \lambda_n = \det A$ ($= |A|$).

参考にする証明の例 $n=2$ のとき. 固有値を求める方程式は

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix}$$

より

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} \\ &= \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\ &= \lambda^2 - \text{tr} A \lambda + \det A \end{aligned} \tag{1}$$

である. そこで, この式を

$$g(\lambda) := \det(A - \lambda I)$$

(これを固有多項式とよび $g(\lambda) = 0$ を固有方程式とよんだりする) と定義し, λ_1, λ_2 を A の固有値とすれば固有値の定義から

$$g(\lambda_1) = 0, \quad g(\lambda_2) = 0$$

を満たす. よって, $g(\lambda)$ は λ の 2 次式で λ^2 の係数は 1 なので

$$g(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2 \tag{2}$$

の形をしていることが分かる．(1) と (2) の **2 番目の項の係数**と**最後の項の係数**を比較すると，

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \text{tr}A, \quad \lambda_1 \lambda_2 = \det A$$

を得る．

解答例 $n = 3$ のとき．固有値を求める方程式は

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{pmatrix}$$

より

$$\begin{aligned} g(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (a_{11} - \lambda) \begin{vmatrix} a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} - \lambda & a_{23} \end{vmatrix} \\ &= (a_{11} - \lambda) \{ (a_{22} - \lambda)(a_{33} - \lambda) - a_{23}a_{32} \} - a_{21} \{ a_{12}(a_{33} - \lambda) - a_{13}a_{32} \} \\ &\quad + a_{31} \{ a_{12}a_{23} - a_{13}(a_{22} - \lambda) \} \\ &= -\lambda^3 + (a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda^2 - \boxed{}\lambda \\ &\quad + (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{13}a_{32} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{11}a_{23}a_{31} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{31}a_{13}a_{22}) \\ &= -\lambda^3 + \text{tr}A\lambda^2 - \boxed{}\lambda + \det A \end{aligned} \tag{3}$$

である．そこで， $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ を A の固有値とすれば固有値の定義から

$$g(\lambda_1) = 0, \quad g(\lambda_2) = 0, \quad g(\lambda_3) = 0$$

を満たす．よって， $g(\lambda)$ は λ の 3 次式で λ^3 の係数は -1 なので

$$g(\lambda) = -(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3) = -\lambda^3 + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\lambda^2 - \boxed{}\lambda + \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \tag{4}$$

の形をしていることが分かる．(3) と (4) の **2 番目の項の係数**と**最後の項の係数**を比較すると，

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \text{tr}A, \quad \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \det A$$

を得る．