微分方程式II・自習シート

問 1　次の問いに答えよ.

(1) $e > 2.70$ を証明せよ.

(2) I, B を

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とする. I^2, I^3, B^2, B^3 をそれぞれ計算せよ. また, 2 次正方行列 A に対して

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$$

で定義する. e^I, e^B がそれぞれどのような行列になるか計算せよ.

問 2　A, B を 2 次正方行列とする. すなわち

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

とする. フロベニウスノルム

$$\|A\| := \sqrt{\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}^2} \qquad \left(\text{つまり} = \sqrt{\sum_{i=1}^{2} \left(\sum_{j=1}^{2} a_{ij}^2 \right)} \quad \right)$$
$$= \sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{21}^2 + a_{22}^2} \quad (i, j = 1 \text{ から } i, j = 2 \text{ までのすべての和})$$

に対して

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$$

が成立することを証明せよ. ただし, つぎのシュワルツの不等式を用いてもよい.

$$ab \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 \qquad (\text{全部ばらすならば})$$

$$\left(\sum_{k=1}^{2} c_k d_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{2} c_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{2} d_k^2 \right) \qquad (\text{和の形を残しながらならば})$$

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと. 提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.