

微分方程式 II・自習シート

問1 次の f の括弧内の点における n 次近似式を, ランダウの記号 o を用いて等式で求めよ.

$$(1) f(x) = e^{2x} \quad (x = 0)$$

$$(2) f(x) = \log(1+x) \quad (x = 1)$$

問2 $\sin x$ の $x = 0$ における $2n+1$ 次近似式, $\cos x$ の $x = 0$ における $2n$ 次近似式, ランダウの記号 o を用いて等式で求めよ.

問3 A を $n \times n$ 行列とする. 以後, 行列を

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

とかくことにする. 「実数の大きさの数値化」である絶対値のように, 「行列 A の大きさ」の数値化としてノルム¹⁾を

$$\begin{aligned} \|A\| &:= \sqrt{\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2} \quad \left(\text{つまり} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)} \right) \\ &= \sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2 + \cdots + a_{1n}^2 + a_{21}^2 + \cdots + a_{nn}^2} \quad (i, j = 1 \text{ から } i, j = n \text{ までのすべての和}) \end{aligned}$$

を定義する (A のフロベニウスノルムと呼ぶことがある). このとき, 次の行列 A, B, I に対して $\|A\|, \|B\|, \|I\|$ の値をそれぞれ求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと. 提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.

¹⁾行列式 $|A|$ とは異なることに注意. 実際, 行列 A

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

の行列式

$$|A| = |ad - bc|$$

は行列の大きさの数値化としては不適切である. 例えば

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

の行列式 $|C|$ は 0 であるが, C 自身は成分がすべて 0 の行列ではなく, 実数 r に対して $|r| = 0$ ならばまたそのときに限り $r = 0$ であるという「大きさの数値化」の前提 (ノルムの定義) を満たしていない. 行列式はその行列が作る変換の面積倍率を意味している.