

微分方程式 II・自習シート

問 1

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

とする.

(1) A の固有値と固有ベクトルを求め、さらに e^{tA} を具体的に求めよ.¹⁾

解答例

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & 3 - \lambda \end{pmatrix}$$

より行列式が 0 となるのは

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & 3 - \lambda \end{vmatrix} &= -\lambda(3 - \lambda) + 2 \\ &= \lambda(\lambda - 3) + 2 \\ &= \lambda^2 - 3\lambda + 2 \\ &= (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0 \end{aligned}$$

より、固有値は $\lambda = 1, 2$ ²⁾. $\lambda = 1$ のとき固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より $-x_1 + x_2 = 0$ から

$$\boldsymbol{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

は対応する固有ベクトルとなる. $\lambda = 2$ のとき固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より $-2x_1 + x_2 = 0$ から

$$\boldsymbol{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

は対応する固有ベクトルとなる. 以上より例えば

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{\det P} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

提出する場合は、解答例を参考にして自分で採点しておくこと。提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です。

¹⁾ $e^{BAB^{-1}} = Be^AB^{-1}$ が成立することに注意せよ。対角化に用いた P や P^{-1} も計算しておくこと。

²⁾ $1 + 2 = 3 = \text{tr}A = 0 + 3$ より確かに正しそう。

によって³⁾ A は

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = B$$

に対角化できる. つまり

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1} = PBP^{-1}$$

と変形できる. よって

$$\begin{aligned} e^{tA} &= e^{tPBP^{-1}} \\ &= Pe^{tB}P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2e^t & -e^t \\ -e^{2t} & e^{2t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2e^t - e^{2t} & -e^t + e^{2t} \\ 2e^t - 2e^{2t} & -e^t + 2e^{2t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(2) (1) を用いて次の連立微分方程式

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -2x + 3y \end{cases}$$

を初期条件 $(x(0), y(0)) = (1, 0)$ とともに解け.

解答例

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とする. (2) の微分方程式は

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

とかけ, その解は

$$\mathbf{x}(t) = e^{tA}\mathbf{x}_0$$

で与えられるが (1) より

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \begin{pmatrix} 2e^t - e^{2t} & -e^t + e^{2t} \\ 2e^t - 2e^{2t} & -e^t + 2e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2e^t - e^{2t} \\ 2e^t - 2e^{2t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

³⁾ P は必ずしもこの形だけとは限らない. 固有ベクトルは定数倍に対して無数に存在するので, P の決め方も無数に存在する.

問2 $x = x(t)$, $y = y(t)$ とする. 次の微分方程式系 (連立微分方程式) の一般解を, e^{tA} を用いる方法で求めよ.

$$\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = -x - 2y \end{cases}$$

解答例 $\boldsymbol{x} := {}^T(x, y)$, および

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

とおくとこの微分方程式系は

$$\boldsymbol{x}'(t) = A\boldsymbol{x}(t)$$

とかける.

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ -1 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(-2 - \lambda) + 2 \\ &= (\lambda - 1)(\lambda + 2) + 2 \\ &= \lambda^2 + \lambda - 2 + 2 \\ &= \lambda(\lambda + 1) = 0 \end{aligned}$$

より, 固有値は $\lambda = 0, -1$ ⁴⁾. $\lambda = 0$ のとき固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より $v_1 + 2v_2 = 0$ から

$$\boldsymbol{v} = t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\forall t \in \mathbb{R}; t \neq 0)$$

が対応する固有ベクトルとなる. $\lambda = -1$ のとき固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より $v_1 + v_2 = 0$ から

$$\boldsymbol{v} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (\forall t \in \mathbb{R}; t \neq 0)$$

が対応する固有ベクトルとなる. 以上より例えば

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{\det P} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

によって

$$A = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

と変形できる. よって

$$e^{tA} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} P^{-1}$$

⁴⁾ $0 - 1 = \text{tr}A = 1 - 2$ より確かに正しそう.

でさらに、微分方程式系の特解は、初期条件 \mathbf{x}_0 を用いて

$$\mathbf{x}(t) = e^{tPAP^{-1}} \mathbf{x}_0 = Pe^{tA}P^{-1} \mathbf{x}_0$$

となるので、あらためて

$${}^T(C_1, C_2) := P^{-1} \mathbf{x}_0$$

とおけば⁵⁾、微分方程式系の一般解は

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = Pe^{tA} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 e^{-t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2C_1 + C_2 e^{-t} \\ C_2 - C_2 e^{-t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる.

□

⁵⁾一般解を求めるだけなので、 $P^{-1} \mathbf{x}_0$ の部分を計算せずその部分を定数 ${}^T(C_1, C_2)$ と置いている。実際、もし $\mathbf{x}_0 := {}^T(x_0, y_0)$ とおいて真面目に $P^{-1} \mathbf{x}_0$ を計算すると

$$P^{-1} \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_0 - y_0 \\ -x_0 - 2y_0 \end{pmatrix}$$

となるが、これらをあらためて

$$C_1 := -x_0 - y_0, \quad C_2 := -x_0 - 2y_0$$

と置き直したにすぎない。