

微分方程式 II・自習シート

問1 $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, すなわち n 次正方行列とする. 以下を手順に従って証明せよ¹⁾.

e^A の逆行列 $(e^A)^{-1}$ は e^{-A} と等しい.

(1) 次回講義で証明する予定の「 $AB = BA$ ならば $e^A e^B = e^B e^A = e^{A+B}$ 」を用いて,

$$e^A e^{-A} = e^{-A} e^A = I$$

を証明せよ.

解答例 B として $-A$ をとると, $AB = A(-A) = -A^2 = (-A)A = BA$ より定理が使える. $A + (-A) = O$ より

$$e^A e^{-A} = e^O$$

一方, $e^O = I$ であったので

$$(\text{左辺}) = e^A e^{-A} = e^O = I = (\text{右辺})$$

同様に, $e^{-A} e^A = I$ も証明できる.

(2) 線形代数のテキストを調べて A の逆行列 A^{-1} の定義をかけ.

解答例 $AB = BA = I$ を満たす行列 B のことを A の逆行列といい, B のことを A^{-1} とかく.

(3) $(e^A)^{-1} = e^{-A}$ を証明せよ.

解答例 (1) より $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点しておくこと. 提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.

¹⁾ただし, A を例えば

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

とすると $-A$ とは $(-1)A$, つまり次の行列を意味する:

$$-A = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & \cdots & \cdots & -a_{nn} \end{pmatrix}$$

問2 $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, すなわち n 次正方行列とする. 以下を手順に従って証明せよ.

B が逆行列を持つならば

$$Be^AB^{-1} = e^{BAB^{-1}}$$

(1) $(BAB^{-1})^2$ は指数を積でかくと

$$\begin{aligned}(BAB^{-1})^2 &= (BAB^{-1})(BAB^{-1}) \\ &= BAB^{-1}BAB^{-1} \\ &= BAIAB^{-1} \\ &= BAAB^{-1} \\ &= BA^2B^{-1}\end{aligned}$$

と計算できる (ここで $B^{-1}B = I$ を用いた). $(BAB^{-1})^3$ や $(BAB^{-1})^n$ をそれぞれ求めよ.

解答例 $(BAB^{-1})^2 = BA^2B^{-1}$ より

$$\begin{aligned}(BAB^{-1})^3 &= (BAB^{-1})^2(BAB^{-1}) \\ &= (BA^2B^{-1})(BAB^{-1}) \\ &= BA^2B^{-1}BAB^{-1} \\ &= BA^2IAB^{-1} \\ &= BA^2AB^{-1} \\ &= BA^3B^{-1}\end{aligned}$$

帰納的に

$$\begin{aligned}(BAB^{-1})^n &= (BAB^{-1})^{n-1}(BAB^{-1}) \\ &= (BA^{n-1}B^{-1})(BAB^{-1}) \\ &= BA^{n-1}B^{-1}BAB^{-1} \\ &= BA^{n-1}IAB^{-1} \\ &= BA^{n-1}AB^{-1} \\ &= BA^nB^{-1}\end{aligned}$$

を得る (厳密には数学的帰納法を用いて証明できる).

(2) $e^{BAB^{-1}}$ の級数による定義をかけ, また, その第 N 項までの和 S_N をかけ.

解答例

$$e^{BAB^{-1}} = I + (BAB^{-1}) + \frac{1}{2!}(BAB^{-1})^2 + \cdots + \frac{1}{N!}(BAB^{-1})^N + \cdots$$

I を第 0 項と数えるならば

$$S_N = I + (BAB^{-1}) + \frac{1}{2!}(BAB^{-1})^2 + \cdots + \frac{1}{N!}(BAB^{-1})^N$$

(なお I を第1項と数えるならば

$$S_N = I + (BAB^{-1}) + \frac{1}{2!}(BAB^{-1})^2 + \cdots + \frac{1}{(N-1)!}(BAB^{-1})^{N-1}$$

であるがどちらでも本質的に違いはない. 以降 (3) では上を採用している.)

(3) 行列のノルムに対する性質 $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ を用いて

$$\|Be^AB^{-1} - S_N\| \leq \|B\| \left\| e^A - \left(I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \cdots + \frac{1}{N!}A^N \right) \right\| \|B^{-1}\|$$

を示せ.

解答例 (1) とノルムの性質 $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ より

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= \|Be^AB^{-1} - S_N\| \\ &= \left\| Be^AB^{-1} - \left(I + (BAB^{-1}) + \frac{1}{2!}(BAB^{-1})^2 + \cdots + \frac{1}{N!}(BAB^{-1})^N \right) \right\| \\ &= \left\| Be^AB^{-1} - \left(BB^{-1} + (BAB^{-1}) + \frac{1}{2!}(BA^2B^{-1}) + \cdots + \frac{1}{N!}(BA^NB^{-1}) \right) \right\| \\ &= \left\| Be^AB^{-1} - \left(BIB^{-1} + BAB^{-1} + B\frac{1}{2!}A^2B^{-1} + \cdots + B\frac{1}{N!}A^NB^{-1} \right) \right\| \\ &= \left\| B \left(e^A - I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \cdots + \frac{1}{N!}A^N \right) B^{-1} \right\| \\ &\leq \|B\| \left\| e^A - \left(I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \cdots + \frac{1}{N!}A^N \right) \right\| \|B^{-1}\| = (\text{右辺}) \end{aligned}$$

(4) 三角不等式

$$\|Be^AB^{-1} - e^{BAB^{-1}}\| \leq \|Be^AB^{-1} - S_N\| + \|S_N - e^{BAB^{-1}}\|$$

を用いて, $Be^AB^{-1} = e^{BAB^{-1}}$ を証明せよ.

解答例 e^A や $e^{BAB^{-1}}$ の定義から $N \rightarrow \infty$ とすると

$$\begin{aligned} \left\| e^A - \left(I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \cdots + \frac{1}{N!}A^N \right) \right\| &\rightarrow 0 \\ \|S_N - e^{BAB^{-1}}\| &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

よって

$$\|Be^AB^{-1} - e^{BAB^{-1}}\| \leq \|Be^AB^{-1} - S_N\| + \|S_N - e^{BAB^{-1}}\| \rightarrow 0$$

すなわち

$$\|Be^AB^{-1} - e^{BAB^{-1}}\| = 0$$

これは, $Be^AB^{-1} - e^{BAB^{-1}} = O$, いいかえれば

$$Be^AB^{-1} = e^{BAB^{-1}}$$

を意味する.

問3 次の微分方程式を考える. $x = x(t)$ とし

$$x'' + 2x' + 5x = 0 \quad (1)$$

新しく未知関数 x_1 を x の1階微分 x' とおく, つまり $x_1 = x'$ とおく. このとき, この微分方程式から

$$x'' + 2x' + 5x = x'_1 + 2x_1 + 5x = 0$$

が得られるので (2) は

$$\begin{cases} x' = x_1 \\ x'_1 + 2x_1 + 5x = 0 \end{cases}$$

と同値である. つまり次の定数係数斉次 (同次) 線形微分方程式

$$x'' + a_1x' + a_2x = 0$$

や

$$x^{(n)} + a_1x^{(n-1)} + a_2x^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1}x' + a_nx = 0$$

は必ず1階の連立微分方程式に書き換えられる. 次の微分方程式を1階の連立微分方程式にそれぞれ書き換えよ.

(1) $x'' + 8x' + 16x = 0$

(2) $x''' + 6x'' + 12x' + 8x = 0$

(3) $x''' - 3x'' + 4x = 0$

(4) $x^{(4)} - 3x''' + 3x'' - x' = 0$

解答例 (1) 新しく未知関数 x_1 を x の1階微分 x' とおく, つまり $x_1 = x'$ とおく. このとき, この微分方程式から

$$x'' + 8x' + 16x = x'_1 + 8x_1 + 16x = 0$$

が得られるので

$$\begin{cases} x' = x_1 \\ x'_1 + 8x_1 + 16x = 0 \end{cases}$$

と同値である.

(2) 新しく未知関数 x_1 を $x_1 = x'$, x_2 を $x_2 = x'_1 (= x'')$ とおく. このとき, この微分方程式から

$$x''' + 6x'' + 12x' + 8x = x'_2 + 6x_2 + 12x_1 + 8x = 0$$

が得られるので

$$\begin{cases} x' = x_1 \\ x'_1 = x_2 \\ x'_2 + 6x_2 + 12x_1 + 8x = 0 \end{cases}$$

と同値である.

(3) 新しく未知関数 x_1 を $x_1 = x'$, x_2 を $x_2 = x'_1 (= x'')$ とおく. このとき, この微分方程式から

$$x''' - 3x'' + 4x = x'_2 - 3x_2 + 4x = 0$$

が得られるので

$$\begin{cases} x' = x_1 \\ x'_1 = x_2 \\ x'_2 - 3x_2 + 4x = 0 \end{cases}$$

と同値である.

(4) 新しく未知関数 x_1 を $x_1 = x'$, x_2 を $x_2 = x'_1 (= x'')$, x_3 を $x_3 = x'_2 = (x''')$ とおく. このとき, この微分方程式から

$$x^{(4)} - 3x''' + 3x'' - x' = x'_3 - 3x_3 + 3x_2 - x_1 = 0$$

が得られるので

$$\begin{cases} x' = x_1 \\ x'_1 = x_2 \\ x'_2 = x_3 \\ x'_3 - 3x_3 + 3x_2 - x_1 = 0 \end{cases}$$

と同値である.

問4 次の微分方程式を考える. $x = x(t)$ とし

$$x'' + 2x' + 5x = 0 \quad (2)$$

問3より (2) は

$$\begin{cases} x' = x_1 \\ x'_1 = -5x - 2x_1 \end{cases}$$

と同値である. そこでベクトル $\mathbf{x}$ を

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ x_1 \end{pmatrix}$$

と定義すれば²⁾,

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ x'_1 \end{pmatrix}$$

でさらに連立微分方程式は行列を用いて

$$\begin{pmatrix} x' \\ x'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -5x - 2x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x_1 \end{pmatrix}$$

結局, 微分方程式 (2) は

$$\begin{pmatrix} x' \\ x'_1 \end{pmatrix} = \mathbf{x}' = A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x_1 \end{pmatrix}$$

のように $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ と同値である. つまり次の定数係数斉次 (同次) 線形微分方程式

$$x'' + a_1x' + a_2x = 0$$

²⁾ x を x_0 だと思えば第 0 成分, 第 1 成分と縦に並べたベクトルと見なせる

や

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + a_2 x^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} x' + a_n x = 0$$

は、行列 A を用いて必ず $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ に書き換えられる。次の微分方程式を $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ に書き換えるための行列 A をそれぞれ求めよ。

$$(1) \quad x'' + 8x' + 16x = 0$$

$$(2) \quad x''' + 6x'' + 12x' + 8x = 0$$

$$(3) \quad x''' - 3x'' + 4x = 0$$

$$(4) \quad x^{(4)} - 3x''' + 3x'' - x' = 0$$

解答例 問3の解答例を用いる。

(1)

$$\begin{cases} x' = x_1 \\ x_1' + 8x_1 + 16x = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x' = & x_1 \\ x_1' = -16x - 8x_1 \end{cases}$$

と同値であったので

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ x_1 \end{pmatrix}$$

と定義すれば

$$\begin{pmatrix} x' \\ x_1' \end{pmatrix} = \mathbf{x}' = A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -16 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x_1 \end{pmatrix}$$

のように $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ と同値である。すなわち

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -16 & -8 \end{pmatrix}$$

(2)

$$\begin{cases} x' = x_1 \\ x_1' = x_2 \\ x_2' + 6x_2 + 12x_1 + 8x = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x' = & x_1 \\ x_1' = & x_2 \\ x_2' = -8x - 12x_1 - 6x_2 \end{cases}$$

と同値であったので

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

と定義すれば

$$\begin{pmatrix} x' \\ x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \mathbf{x}' = A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -12 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

のように $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ と同値である。すなわち

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -12 & -6 \end{pmatrix}$$

(3)

$$\begin{cases} x' = x_1 \\ x'_1 = x_2 \\ x'_2 - 3x_2 + 4x = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x' = x_1 \\ x'_1 = x_2 \\ x'_2 = -4x + 3x_2 \end{cases}$$

と同値であったので

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

と定義すれば

$$\begin{pmatrix} x' \\ x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

のように $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ と同値である. すなわち

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(4)

$$\begin{cases} x' = x_1 \\ x'_1 = x_2 \\ x'_2 = x_3 \\ x'_3 - 3x_3 + 3x_2 - x_1 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x' = x_1 \\ x'_1 = x_2 \\ x'_2 = x_3 \\ x'_3 = x_1 - 3x_2 + 3x_3 \end{cases}$$

と同値であったので

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

と定義すれば

$$\begin{pmatrix} x' \\ x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

のように $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ と同値である. すなわち

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$