

微分方程式 II・自習シート

問1 次の f の括弧内の点における n 次近似式を, ランダウの記号 o を用いて等式で求めよ.

$$(1) f(x) = e^{2x} \quad (x = 0)$$

$$(2) f(x) = \log(1+x) \quad (x = 1)$$

解答例 (1)

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{2x}, & f(0) &= 1, \\ f'(x) &= 2e^{2x}, & f'(0) &= 2, \\ f''(x) &= 2^2 e^{2x}, & f''(0) &= 2^2, \\ f^{(3)}(x) &= 2^3 e^{2x}, & f^{(3)}(0) &= 2^3, \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x) &= 2^n e^{2x}, & f^{(n)}(0) &= 2^n. \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} e^{2x} &= f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{1}{2!}f''(0)(x-0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)(x-0)^n + o(x^n) \\ &= 1 + 2x + \frac{2^2}{2!}x^2 + \frac{2^3}{3!}x^3 + \frac{2^4}{4!}x^4 + \cdots + \frac{2^n}{n!}x^n + o(x^n) \\ &= 1 + 2x + \frac{1}{2!}(2x)^2 + \frac{1}{3!}(2x)^3 + \frac{1}{4!}(2x)^4 + \cdots + \frac{1}{n!}(2x)^n + o(x^n) \\ &\quad (\text{上の式でも下の式でもよい}). \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} f(x) &= \log(1+x), & f(1) &= \log(1+1) = \log 2, \\ f'(x) &= \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}, & f'(1) &= \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}, \\ f''(x) &= -(1+x)^{-2}, & f''(1) &= -\frac{1}{(1+1)^2} = -\frac{1}{2^2}, \\ f^{(3)}(x) &= -(-2)(1+x)^{-3}, & f^{(3)}(1) &= -(-2)(1+1)^{-3} = 2\frac{1}{2^3}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n}, \quad f^{(n)}(1) = (-1)^{n-1}(n-1)!(1+1)^{-n} = (-1)^{n-1}(n-1)!\frac{1}{2^n}.$$

よって

$$\begin{aligned}
\log(1+x) &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2!}f''(1)(x-1)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(1)(x-1)^n + o((x-1)^n) \\
&= \log 2 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{2!}\frac{1}{2^2}(x-1)^2 + \frac{2!}{3!}\frac{1}{2^3}(x-1)^3 - \frac{3!}{4!}\frac{1}{2^4}(x-1)^4 + \\
&\quad \cdots + (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{n!}\frac{1}{2^n}(x-1)^n + o((x-1)^n) \\
&= \log 2 + \frac{x-1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{2}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{x-1}{2}\right)^4 + \\
&\quad \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}\left(\frac{x-1}{2}\right)^n + o((x-1)^n) \quad (\text{上の式でも下の式でもよい}).
\end{aligned}$$

問 2 $\sin x$ の $x = 0$ における $2n+1$ 次近似式, $\cos x$ の $x = 0$ における $2n$ 次近似式, ランダウの記号 o を用いて等式で求めよ.

解答例 $f(x) = \sin x$ とおくと, $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f^{(3)}(x) = -\cos x$, $f^{(4)}(x) = \sin x$, $f^{(5)}(x) = \cos x$ と続き, $x = 0$ を代入すると $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f^{(3)}(0) = -1$, $f^{(4)}(0) = 0$, $f^{(5)}(0) = 1$ と続き, さらに

$$f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n$$

を得る. よって,

$$\begin{aligned}
\sin x &= f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \cdots + \frac{1}{(2n+1)!}f^{(2n+1)}(0)x^{2n+1} + o(x^{2n+1}) \\
&= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + o(x^{2n+1}).
\end{aligned}$$

$f(x) = \cos x$ とおくと, $f'(x) = -\sin x$, $f''(x) = -\cos x$, $f^{(3)}(x) = \sin x$, $f^{(4)}(x) = \cos x$, $f^{(5)}(x) = -\sin x$ と続き, $x = 0$ を代入すると $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = -1$, $f^{(3)}(0) = 0$, $f^{(4)}(0) = 1$, $f^{(5)}(0) = 0$ と続き, さらに

$$f^{(2n)}(0) = (-1)^n$$

を得る. よって,

$$\begin{aligned}
\cos x &= f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \cdots + \frac{1}{(2n+1)!}f^{(2n+1)}(0)x^{2n+1} + o(x^{2n+1}) \\
&= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + o(x^{2n}).
\end{aligned}$$

問 3 A を $n \times n$ 行列とする. 以後, 行列を

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

とにかくことにする。「実数の大きさの数値化」である絶対値のように、「行列 A の大きさ」の数値化としてノルム¹⁾を

$$\begin{aligned}\|A\| &:= \sqrt{\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2} \quad \left(\text{つまり} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)} \right) \\ &= \sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2 + \cdots + a_{1n}^2 + a_{21}^2 + \cdots + a_{nn}^2} \quad (i, j = 1 \text{ から } i, j = n \text{ までのすべての和})\end{aligned}$$

を定義する (A のフロベニウスノルムと呼ぶことがある). このとき, 次の行列 A, B, I に対して $\|A\|, \|B\|, \|I\|$ の値をそれぞれ求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

解答例

$$\begin{aligned}\|A\| &= \sqrt{1^2 + 2^2 + 8^2 + 10^2} = \sqrt{169} = 13 \\ \|B\| &= \sqrt{2^2 + 1^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2 + 1^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{16} = 4 \\ \|I\| &= \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}\end{aligned}$$

¹⁾行列式 $|A|$ とは異なることに注意. 実際, 行列 A

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

の行列式

$$|A| = |ad - bc|$$

は行列の大きさの数値化としては不適切である. 例えば

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

の行列式 $|C|$ は 0 であるが, C 自身は成分がすべて 0 の行列ではなく, 実数 r に対して $|r| = 0$ ならばまたそのときに限り $r = 0$ であるという「大きさの数値化」の前提 (ノルムの定義) を満たしていない. 行列式はその行列が作る変換の面積倍率を意味している.