

微分方程式 II ・ 自習シート

問1 次の関数 $f(x)$ の括弧内の点における 1 次近似式を求めよ.

$$(1) f(x) = e^{-x} \quad (x = 0)$$

$$(2) f(x) = \cos x \quad (x = 0)$$

$$(3) f(x) = \sqrt[3]{x} \quad (x = 1)$$

解答例 (1)

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{-x}, & f(0) &= e^0 = 1, \\ f'(x) &= -e^{-x}, & f'(0) &= -e^0 = -1. \end{aligned}$$

よって, $x = 0$ における 1 次近似式は

$$f(0) + f'(0)(x - 0) = 1 - x.$$

(2)

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x, & f(0) &= \cos 0 = 1, \\ f'(x) &= -\sin x, & f'(0) &= -\sin 0 = 0. \end{aligned}$$

よって, $x = 0$ における 1 次近似式は

$$f(0) + f'(0)(x - 0) = 1.$$

(3)

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt[3]{x} = x^{1/3}, & f(1) &= 1, \\ f'(x) &= \frac{1}{3}x^{-2/3}, & f'(1) &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

よって, $x = 1$ における 1 次近似式は

$$\begin{aligned} f(1) + f'(1)(x - 1) &= 1 + \frac{1}{3}(x - 1) \\ &= \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

問2 [微積分及び演習の復習] 例題を元に次の命題を記号「 \forall 」と「 \exists s.t.」¹⁾を用いて書け.

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点しておくこと. 提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.

¹⁾例えば集合 A に対して「任意の $x \in A$ に対して $P(x)$ が成立する」や「すべての $x \in A$ に対して $P(x)$ が成立する」という命題を「 $\forall x \in A, P(x)$ 」や「 $\forall x \in A, P(x)$ 」と略記することがある. \forall の記号は「任意の」を英語で表記した「for all」の「A」を逆さにして「V」とタイピングしたのが始まりだと言われている. つまり, 「すべての自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して $n \neq -1$ である」は「For all $n \in \mathbb{N}, n \neq -1$ 」と英語で表現でき, これを「 $\forall n \in \mathbb{N}, n \neq -1$ 」と書いたりする. また, 「ある $x \in A$ が存在して $P(x)$ が成立する」という命題を「 $\exists x \in A$ s.t. $P(x)$ 」や「 $\exists x \in A$ s.t. $P(x)$ 」と略記することがある. \exists の記号は英語で表記した「there exists $\alpha \in A$ such that $P(x)$ 」の「E」を逆さにして「O」とタイピングしたのが始まりだと言われている. また「s.t.」は「such that」の省略形であるため s と t の両方の後ろに省略を意味するピリオドをつける.

(例題 1) 全ての自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して, $n \neq -1$ である.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \neq -1$$

(例題 2) ある自然数 $n \in \mathbb{N}$ が存在して, $m = 2n$ である.

$$\exists n \in \mathbb{N} \quad \text{s.t.} \quad m = 2n$$

- (1) 任意の整数 $k \in \mathbb{Z}$ に対して, $k \neq \sqrt{2}$ である.
- (2) ある実数 $r \in \mathbb{R}$ が存在して, $s = -r$ である.
- (3) すべての有理数 $q \in \mathbb{Q}$ に対して, ある整数 $k, \ell \in \mathbb{Z}$ が存在して, $q = k/\ell$ である.
- (4) ある正の実数 $M > 0$ が存在して, 任意の自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して, $-n \leq M$ である.
- (5) 任意の実数 $r \in \mathbb{R}$ に対して, ある自然数 $N \in \mathbb{N}$ が存在して, $r \leq N$ である.
- (6) 任意の正の数 $\varepsilon > 0$ に対して, ある自然数 $N \in \mathbb{N}$ が存在して, 任意の自然数 $n \geq N$ に対して, $|a_n - \alpha| < \varepsilon$.

解答例

- (1) $\forall k \in \mathbb{Z}, k \neq \sqrt{2}$.
- (2) $\exists r \in \mathbb{R} \text{ s.t. } s = -r$.
- (3) $\forall q \in \mathbb{Q}, \exists k, \ell \in \mathbb{Z} \text{ s.t. } q = k/\ell$.
- (4) $\exists M > 0 \text{ s.t. } \forall n \in \mathbb{N}, -n \leq M$.
- (5) $\forall r \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } r \leq N$.
- (6) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \forall n \geq N, |a_n - \alpha| < \varepsilon$.

問 3[線形代数及び演習の復習] 実数 \mathbb{R} には絶対値 $|\cdot|$ が定義されている. 絶対値は次の 3 条件を満たす: どのような $x, y \in \mathbb{R}$ に対しても

- (i) 常に $|x| \geq 0$ である. 特に「 $|x| = 0 \iff x = 0$ 」;
- (ii) x の定数倍 rx について, $|rx| = |r||x|$ がどのような $r \in \mathbb{R}$ に対しても成立する;
- (iii) $|x + y| \leq |x| + |y|$ が成立する.

これを一般化してノルムとよばれる大きさを測る関数 $\|\cdot\|$ を定義する. すなわちある集合 V に対して²⁾ 次の 3 条件を満たすとき $\|\cdot\|$ を V のノルムという: どのような $x, y \in V$ に対しても

- (i) 常に $\|x\| \geq 0$ である. 特に「 $\|x\| = 0 \iff x$ は V の空間における 0 」;
- (ii) x の定数倍 rx について, $\|rx\| = |r|\|x\|$ がどのような $r \in \mathbb{R}$ に対しても成立する;
- (iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ が成立する.

²⁾ V には和と定数倍が定義されていてとある性質を満たしていることを要請するがここではそれについては述べない. すなわち, 厳密には「 V は線形空間とする」と言うておく必要がある.

(例題) の解答を参考に, 次の (問い) に答えよ. ただし三角不等式の証明にはシュワルツの不等式³⁾を用いてよい.

(例題) $V := \mathbb{C}$ とする. $\alpha \in V$ に対して, $\alpha := a + bi$ とおき

$$\|\alpha\| := \sqrt{a^2 + b^2}$$

で定義すると $\|\cdot\|$ は V のノルムになることを証明せよ.

(問い) $V := \mathbb{R}^{n \times n}$, つまり n 次正方形行列とする. $A \in V$ に対して,

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

とおき

$$\|A\| := \sqrt{\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2}$$

で定義すると $\|\cdot\|$ は V のノルムになることを証明せよ.

例題の解答 (1) ノルムの 3 条件を満たすことを示す. $\alpha, \beta \in V$ とし,

$$\alpha := a + bi, \quad \beta := c + di$$

とおく.

(i) $\|\alpha\| = \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0$. 特に, $\|\alpha\| = 0$ のとき,

$$0 = \sqrt{a^2 + b^2} \geq \sqrt{a^2} = |a|$$

より $a = 0$. 同様に

$$0 = \sqrt{a^2 + b^2} \geq \sqrt{b^2} = |b|$$

より $b = 0$. つまり $\alpha = 0 + 0i = 0$. 逆に $\alpha = 0$ ならば $a = b = 0$. よって $\|\alpha\| = \sqrt{0^2 + 0^2} = 0$ より, ノルムの条件 (i) を満たす.

次に $r \in \mathbb{R}$ とする. $r\alpha = (ra) + (rb)i$ に注意して

$$\begin{aligned} \|r\alpha\| &= \sqrt{(ra)^2 + (rb)^2} \\ &= |r| \sqrt{a^2 + b^2} \\ &= |r| \|\alpha\|. \end{aligned}$$

よって, ノルムの条件 (ii) を満たす.

最後に $\alpha + \beta = (a + c) + (b + d)i$ に注意して, シュワルツの不等式を用いると

$$\begin{aligned} \|\alpha + \beta\|^2 &= (a + c)^2 + (b + d)^2 \\ &= a^2 + 2ac + c^2 + b^2 + 2bd + d^2 \\ &\leq (a^2 + c^2) + 2\sqrt{a^2 + c^2}\sqrt{b^2 + d^2} + (b^2 + d^2) \\ &= (\|\alpha\| + \|\beta\|)^2. \end{aligned}$$

³⁾

$$ac + bd \leq \sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{c^2 + d^2}, \quad \sum_{i,j=1}^n a_{ij} b_{ij} \leq \sqrt{\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2} \sqrt{\sum_{i,j=1}^n b_{ij}^2}$$

よって, $\|\alpha + \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|$ が得られ, ノルムの条件 (iii) を満たす.

以上より, $\|\cdot\|$ は V のノルムである. □

問いの解答例 ノルムの 3 条件を満たすことを示す. $A, B \in V$ とし,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

とおく.

(i)

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2} \geq 0.$$

特に, $\|A\| = 0$ のとき,

$$0 = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2} \geq \sqrt{a_{kl}^2} = |a_{kl}|$$

つまり $a_{kl} = 0$ がすべての $k, l \in \mathbb{N}; 1 \leq k, l \leq n$ について成立する. よって $A = O$. ただし,

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

逆に $A = O$ ならば $a_{kl} = 0$ がすべての $k, l \in \mathbb{N}; 1 \leq k, l \leq n$ について成立する. よって $\|A\| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2} = 0$ よりノルムの条件 (i) を満たす.

次に $r \in \mathbb{R}$ とする.

$$rA = \begin{pmatrix} ra_{11} & ra_{12} & \cdots & ra_{1n} \\ ra_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ ra_{n1} & \cdots & \cdots & ra_{nn} \end{pmatrix}$$

に注意して,

$$\begin{aligned} \|rA\| &= \sqrt{\sum_{i,j=1}^n (ra_{ij})^2} \\ &= |r| \sqrt{\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2} \\ &= |r| \|A\|. \end{aligned}$$

よって, ノルムの条件 (ii) を満たす.

最後に

$$\begin{aligned} A + B &:= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} + b_{nn} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

に注意して、シュワルツの不等式を用いると

$$\begin{aligned} \|A + B\|^2 &= \sum_{i,j=1}^n (a_{ij} + b_{ij})^2 \\ &= \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}^2 + 2a_{ij}b_{ij} + b_{ij}^2) \\ &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2 + 2 \sum_{i,j=1}^n a_{ij}b_{ij} + \sum_{i,j=1}^n b_{ij}^2 \\ &\leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2 + 2 \sqrt{\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2} \sqrt{\sum_{i,j=1}^n b_{ij}^2} + \sum_{i,j=1}^n b_{ij}^2 \\ &= (\|A\| + \|B\|)^2. \end{aligned}$$

よって、 $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ が得られ、ノルムの条件 (iii) を満たす。

以上より、 $\|\cdot\|$ は V のノルムである。

□