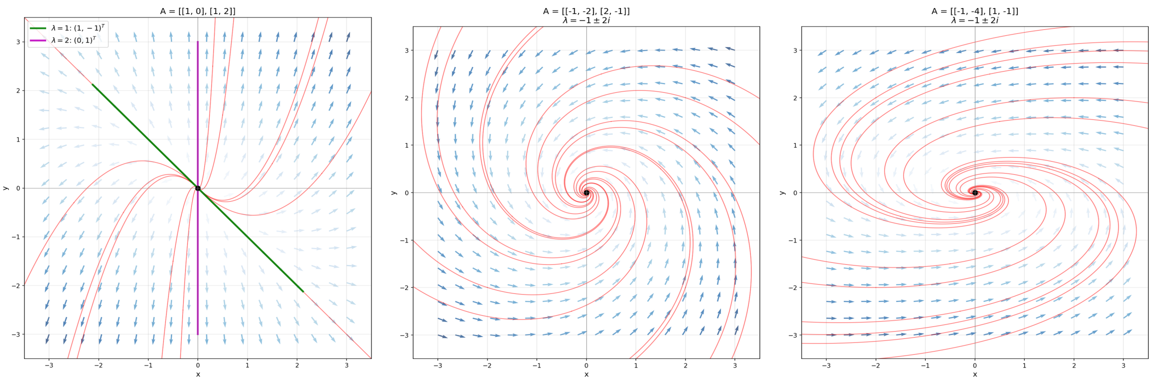
微分方程式II・自習シート

問 1　次の行列のベクトル場をかけ．なお手書きする場合は web サイトにリンクが張ってある方眼紙を利用してもよい．ベクトルの長さは全てを縮小するか, 長さを全て 1 でそろえてもよい．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$



問 2　問 1 に出てきた行列 A, B, C の固有値と固有ベクトルをそれぞれ求めよ．

解答例　A について

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 1)(\lambda - 2) \end{aligned}$$

よって, $\det(A - \lambda I) = 0$ になるのは, $\lambda = 2, 1$ [1]．$\lambda_+ = 2$ に対応する固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} 1-2 & 0 \\ 1 & 2-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より $u_1 = 0$ なので

$$\boldsymbol{u}_+ = s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (s \in \mathbb{R}; s \neq 0)$$

が対応する固有ベクトルとなる．$\lambda_- = 1$ に対応する固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} 1-1 & 0 \\ 1 & 2-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より $u_1 + u_2 = 0$ なので

$$\boldsymbol{u}_- = s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (s \in \mathbb{R}; s \neq 0)$$

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと．提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です．

[1] $2 + 1 = 3 = \mathrm{tr}A$

が対応する固有ベクトルとなる.

B について

$$
\begin{aligned}
\det(B-\lambda I) &= \begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (\lambda+1)(\lambda+1)+4 \\
&= \lambda^2+2\lambda+1+4 \\
&= \lambda^2+2\lambda+5
\end{aligned}
$$

よって, $\det(B-\lambda I)=0$ になるのは, $\lambda=-1\pm 2i$ [2]. $\lambda_+=-1+2i$ に対応する固有ベクトルは

$$
\begin{pmatrix} -1-(-1+2i) & -2 \\ 2 & -1-(-1+2i) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2i & -2 \\ 2 & -2i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

より $-2iu_1-2u_2=0$, $-iu_1=u_2$ なので

$$
\boldsymbol{u}_+ = s\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + si\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (s\in\mathbb{C}; s\neq 0)
$$

が対応する固有ベクトルとなる. $\lambda_-=-1-2i$ に対応する固有ベクトルは $\boldsymbol{u}_+$ の共役なベクトルなので

$$
\boldsymbol{u}_- = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - si\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (s\in\mathbb{R}; s\neq 0)
$$

が対応する固有ベクトルとなる.

C について

$$
\begin{aligned}
\det(C-\lambda I) &= \begin{vmatrix} -1-\lambda & -4 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (\lambda+1)(\lambda+1)+4 \\
&= \lambda^2+2\lambda+1+4 \\
&= \lambda^2+2\lambda+5
\end{aligned}
$$

よって, $\det(C-\lambda I)=0$ になるのは, $\lambda=-1\pm 2i$ [3]. $\lambda_+=-1+2i$ に対応する固有ベクトルは

$$
\begin{pmatrix} -1-(-1+2i) & -4 \\ 1 & -1-(-1+2i) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2i & -4 \\ 1 & -2i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

より $-2iu_1-4u_2=0$, $-iu_1=2u_2$ なので

$$
\boldsymbol{u}_+ = s\begin{pmatrix} 2 \\ -i \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + si\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (s\in\mathbb{C}; s\neq 0)
$$

---

[2] $(-1+2i)+(-1-2i)=-2=\mathrm{tr}A$

[3] $(-1+2i)+(-1-2i)=-2=\mathrm{tr}A$

が対応する固有ベクトルとなる．$\lambda_- = -1 - 2i$ に対応する固有ベクトルは $\boldsymbol{u}_+$ の共役なベクトルなので

$$\boldsymbol{u}_- = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} - si \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (s \in \mathbb{R}; s \neq 0)$$

が対応する固有ベクトルとなる．