微分方程式II・自習シート

問　次の行列 A の固有値と固有ベクトルを考える．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

固有方程式は

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} &= (1-\lambda)^2 + 4 \\ &= \lambda^2 - 2\lambda + 1 + 4 \\ &= \lambda^2 - 2\lambda + 5 \end{aligned}$$

より, $\det(A - \lambda I) = 0$ を満たす λ, つまり固有値は

$$\lambda^2 - 2\lambda - 5 = 0$$

$$\lambda = 1 \pm 2i$$

よって複素数になる [1]．そこで,

$$\lambda_+ := 1 + 2i, \quad \lambda_- := 1 - 2i$$

のように虚部の符号に合わせて λ_+ と $\lambda-$ のように表記することにする．実数の固有値を持つ場合と同様に対応する固有ベクトルを求めると $\lambda_+ = 1 + 2i$ に対応する固有ベクトル $\boldsymbol{v}_+$ は ($A\boldsymbol{v}_+ = \lambda_+\boldsymbol{v}_+$ を満たす $\mathbf{0}$ ではないベクトル)

$$\begin{pmatrix} 1-(1+2i) & 2 \\ -2 & 1-(1+2i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2i & 2 \\ -2 & -2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より $-2iv_1 + 2v_2 = 0$ から (下の $-2v_1 - 2iv_2 = 0$ を使っても同じ結果は得られる)

$$v_2 = iv_1$$

なので

$$\boldsymbol{v}_+ = s\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + si\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (s \in \mathbb{C}; s \neq 0)$$

が対応する固有ベクトルとなる (ただし, s を複素数から選ぶ)．$\lambda_- = 1 - 2i$ に対応する固有ベクトル $\boldsymbol{v}_-$ は

$$\begin{pmatrix} 2i & 2 \\ -2 & 2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より $2iv_1 + 2v_2 = 0$ から

$$v_2 = -iv_1$$

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと．提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です．

[1] $(1 + 2i) + (1 - 2i) = 2 = \mathrm{tr}A = 1 + 1$ より確かに正しそう．

なので

$$\boldsymbol{v}_- = s\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix} = s\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - si\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \quad (s \in \mathbb{C}; s \neq 0)$$

が対応する固有ベクトルとなる.

つまり, $\lambda = 1 \pm 2i$ に対応する固有ベクトルは

$$\boldsymbol{v} = s\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \pm si\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

のように, si がかけられている虚部の符号を対応する固有値の虚部の符号に合わせた形に必ずなる ($\lambda_\pm$ が共役な関係にあるのと同じように $\boldsymbol{v}_\pm$ も共役な関係がある.)

次の行列の固有値と固有ベクトルをそれぞれ求めよ.

$$B = \begin{pmatrix}0 & -1\\4 & 0\end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix}1 & 1\\-5 & 3\end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix}2 & -5\\1 & 2\end{pmatrix}$$

解答例　行列 B に対して固有方程式は

$$\det(B - \lambda I) = \begin{vmatrix}-\lambda & -1\\4 & -\lambda\end{vmatrix} = \lambda^2 + 4$$

より, $\det(B - \lambda I) = 0$ を満たす λ, つまり固有値は $\lambda = \pm 2i$ である [2). $\lambda_+ = 2i$ に対応する固有ベクトル $\boldsymbol{v}_+$ は

$$\begin{pmatrix}0-2i & -1\\4 & 0-2i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2i & -1\\4 & -2i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

より $-2iv_1 - v_2 = 0$, $v_2 = -2iv_1$ から

$$\boldsymbol{v}_+ = s\begin{pmatrix}1\\-2i\end{pmatrix} = s\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + si\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix} \quad ({}^\forall s \in \mathbb{C}; s \neq 0)$$

が対応する固有ベクトルとなる [3). $\lambda_- = -2i$ に対応する固有ベクトル $\boldsymbol{v}_-$ は $\boldsymbol{v}_+$ と共役な

$$\boldsymbol{v}_- = s\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - si\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix} \quad ({}^\forall s \in \mathbb{C}; s \neq 0)$$

となる.

[2)] $2i + (-2i) = 0 = \mathrm{tr}B = 0 + 0$ より確かに正しそう.

[3)] $\lambda = 2i$ のときの固有ベクトルを求める際に

$$\begin{pmatrix}-2i & -1\\4 & -2i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

より下の式 $4v_1 - 2iv_2 = 0$ から $2v_1 = iv_2$ なので**もし他の表現として**

$$\boldsymbol{v} = t\begin{pmatrix}i\\2\end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{C}; t \neq 0)$$

を選んでいたとしても $t = -is$ を選べば

$$\boldsymbol{v} = t\begin{pmatrix}i\\2\end{pmatrix} = (-is)\begin{pmatrix}i\\2\end{pmatrix} = s\begin{pmatrix}1\\-2i\end{pmatrix} \quad (s \in \mathbb{C}; s \neq 0)$$

のように必ず同じ表現の固有ベクトルに直せる.

行列 C に対して固有方程式は

$$\det(C-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -5 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-3)+5$$
$$= \lambda^2 - 4\lambda + 8$$

より, $\det(C-\lambda I)=0$ を満たす λ, つまり固有値は $\lambda = 2 \pm 2i$ である [4]. $\lambda_+ = 2+2i$ のとき固有ベクトル $\boldsymbol{v}_+$ は

$$\begin{pmatrix} 1-(2+2i) & 1 \\ -5 & 3-(2+2i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-2i & 1 \\ -5 & 1-2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より $(-1-2i)v_1 + v_2 = 0$ から $v_2 = (1+2i)v_1$ より

$$\boldsymbol{v}_+ = s\begin{pmatrix} 1 \\ 1+2i \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + si\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (s \in \mathbb{C}; s \neq 0)$$

が対応する固有ベクトルとなる. $\lambda_- = 2-2i$ に対応する固有ベクトル $\boldsymbol{v}_-$ は $\boldsymbol{v}_+$ と共役な

$$\boldsymbol{v}_- = s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - si\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (s \in \mathbb{C}; s \neq 0)$$

となる.

行列 D に対して固有方程式は

$$\det(D-\lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -5 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2 + 5 = \lambda^2 - 4\lambda + 9$$

より, $\det(D-\lambda I)=0$ を満たす λ, つまり固有値は

$$\lambda = 2 \pm \sqrt{5}i$$

である [5]. $\lambda_+ = 2+\sqrt{5}i$ に対応する固有ベクトル $\boldsymbol{v}_+$ は

$$\begin{pmatrix} 2-(2+\sqrt{5}i) & -5 \\ 1 & 2-(2+\sqrt{5}i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{5}i & -5 \\ 1 & -\sqrt{5}i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より $v_1 - \sqrt{5}iv_2 = 0$ から $v_1 = +\sqrt{5}iv_2$ なので

$$\boldsymbol{v}_+ = s\begin{pmatrix} \sqrt{5}i \\ 1 \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + si\begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (s \in \mathbb{C}; s \neq 0)$$

が対応する固有ベクトルとなる [6].

$\lambda_- = 2-\sqrt{5}i$ に対応する固有ベクトル $\boldsymbol{v}_-$ は $\boldsymbol{v}_+$ と共役な

$$\boldsymbol{v}_- = s\begin{pmatrix} \sqrt{5}i \\ 1 \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - si\begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (s \in \mathbb{C}; s \neq 0)$$

となる.

---

[4] $(2+2i)+(2-2i) = 4 = \mathrm{tr}C = 1+3$ より確かに正しそう.

[5] $2+\sqrt{5}i+(2-\sqrt{5}i) = 4 = \mathrm{tr}D = 2+2$ より確かに正しそう.

[6] 上の式 $-\sqrt{5}iv_1 - 5v_2 = 0$ より得られる

$$\boldsymbol{v}_+ = s\begin{pmatrix} \sqrt{5}i \\ 1 \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} + si\begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{5} \end{pmatrix} \quad (s \in \mathbb{C}; s \neq 0)$$

でももちろんよい.