

微分方程式 II・自習シート

問 1 次の関数 f の 2 階導関数 f'' と n 階導関数 $f^{(n)}$ を求めよ.

(1) $f(x) = \sqrt{1+x}$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) (1+x)^{-\frac{3}{2}} \\ &= -\frac{1}{2^2} (1+x)^{-\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'''(x) &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) \left(-\frac{3}{2} \right) (1+x)^{-\frac{5}{2}} \\ &= \frac{1}{2^3} \cdot 3 (1+x)^{-\frac{5}{2}} \end{aligned}$$

よりこれを一般化して

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \frac{1}{2^n} \left(3 \cdot 5 \cdots (2n-3) \right) (1+x)^{-\frac{2n-1}{2}} \quad (n \geq 2)$$

(2) $f(x) = e^{-x}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{-x} \times (-x)' \\ &= -e^{-x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= -(e^{-x} \times (-x)') \\ &= e^{-x} \end{aligned}$$

$$f'''(x) = -e^{-x}$$

よりこれを一般化して

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n e^{-x}$$

(3) $f(x) = \frac{1}{1-x}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -(1-x)^{-2} \times (1-x)' \\ &= (1-x)^{-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= -2(1-x)^{-3} \times (1-x)' \\ &= 2(1-x)^{-3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'''(x) &= 2(-3)(1-x)^{-4} \times (1-x)' \\ &= 2 \cdot 3(1-x)^{-4} \end{aligned}$$

よりこれを一般化して

$$f^{(n)}(x) = n!(1-x)^{-(n+1)}$$

$$(4) f(x) = \log(1+x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \quad \left(= (1+x)^{-1} \right)$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= -1(1+x)^{-2} \\ &= -(1+x)^{-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'''(x) &= -(-2)(1+x)^{-3} \\ &= 2(1+x)^{-3} \end{aligned}$$

よりこれを一般化して

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}(n-1)!(1+x)^{-n}$$

問 2 関数 $f(x) = \cos x$ の $2n$ 階導関数 $f^{(2n)}$ を求めよ. また関数 $g(x) = \sin x$ の $2n+1$ 階導関数 $g^{(2n+1)}$ を求めよ.

$$f(x) = \cos x$$

$$f'(x) = -\sin x$$

$n=1$ のとき

$$f^{(2)}(x) = f''(x) = -\cos x$$

$$f'''(x) = \sin x$$

$n=2$ のとき

$$f^{(4)}(x) = \cos x$$

よりこれを一般化して

$$f^{(2n)}(x) = (-1)^n \cos x$$

$$g(x) = \sin x$$

$$g'(x) = \cos x$$

$$g''(x) = -\sin x$$

$n = 1$ のとき

$$g^{(3)}(x) = g'''(x) = -\cos x$$

$$g^{(4)}(x) = \sin x$$

$n = 2$ のとき

$$g^{(5)}(x) = \cos x$$

よりこれを一般化して

$$g^{(2n+1)}(x) = (-1)^n \cos x$$