令和７年度 微積分及び演習Ⅰ 小テスト No.4 対策プリント

数理・知能・電子・機械・応化・環境　課程 ＿＿＿ 回生　　学生番号 ＿＿＿＿＿＿＿＿　名前 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{5}$ 次の関数を**導関数の定義に従って**微分せよ．

$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$

$h \in \mathbb{R} : h \neq 0$ とする．

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

に注意して

$$\begin{aligned}
&\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \frac{\sqrt[3]{x+h} - \sqrt[3]{x}}{h} \\
&= \frac{\sqrt[3]{x+h} - \sqrt[3]{x}}{h} \times \frac{(\sqrt[3]{x+h})^2 + \sqrt[3]{x+h}\sqrt[3]{x} + (\sqrt[3]{x})^2}{(\sqrt[3]{x+h})^2 + \sqrt[3]{x+h}\sqrt[3]{x} + (\sqrt[3]{x})^2} \\
&= \frac{(x+h) - x}{h} \times \frac{1}{(\sqrt[3]{x+h})^2 + \sqrt[3]{x+h}\sqrt[3]{x} + (\sqrt[3]{x})^2} \\
&= \frac{1}{(\sqrt[3]{x+h})^2 + \sqrt[3]{x+h}\sqrt[3]{x} + (\sqrt[3]{x})^2}
\end{aligned}$$

ここで，$h \to 0$ とすると右辺は極限を持つので

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \frac{1}{(\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{x} + (\sqrt[3]{x})^2} \\
&= \frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2}
\end{aligned}$$

$\boxed{6}$ 次の関数を微分せよ．

(1) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1\sqrt{1+x^2} - x\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} \\
&= \frac{1 + x^2 - x^2}{(1+x^2)^{3/2}} \\
&= \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}
\end{aligned}$$

(2) $f(x) = \mathrm{Cos}^{-1} x$

逆関数の定義より $x = \cos y$ $(0 \leq y \leq \pi)$．よって $dy/dx < 0$ に注意して

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dy} &= -\sin y \\
&= -\sqrt{1 - \cos^2 y} \\
&= -\sqrt{1 - x^2}.
\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}
\end{aligned}$$

$\boxed{7}$ 次の計算をせよ．

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{2-3x}\, dx$

$$\int \frac{1}{2-3x}\, dx = -\frac{1}{3}\log|2-3x| + C.$$

(2) $\displaystyle\int \sin^3 x \cos x\, dx$

$g = \sin x$ とおくと，$g' = dg/dx = \cos x$ で ($dg = \cos x dx$ で)

$$\begin{aligned}
\int \sin^3 x \cos x\, dx &= \int g^3 \frac{dg}{dx} dx \\
&= \int g^3 dg \\
&= \frac{1}{4} g^4 + C \\
&= \frac{1}{4}\sin^4 x + C
\end{aligned}$$

(3) $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^2}\, dx$

$g = 1 + x^2$ とおくと，$g' = dg/dx = 2x$ で ($dg = 2xdx$ で)

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{1+x^2}\, dx &= \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\, dx \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{1}{g}\frac{dg}{dx} dx \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{1}{g} dg \\
&= \frac{1}{2}\log|g| + C \\
&= \frac{1}{2}\log(1+x^2) + C
\end{aligned}$$

(4) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$

$$\begin{aligned}
\int_0^M \frac{1}{1+x^2} dx &= \left[\mathrm{Tan}^{-1} x\right]_{x=0}^{x=M} \\
&= \mathrm{Tan}^{-1} M - \mathrm{Tan}^{-1} 0 \\
&= \mathrm{Tan}^{-1} M.
\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx &= \lim_{M \to +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx \\
&= \lim_{M \to +\infty} \mathrm{Tan}^{-1} M \\
&= \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

$\boxed{8}$ 次の原始関数を定数 C を付けて求めよ.

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx$$

ただし,

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \log(x+\sqrt{1+x^2})+C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \mathrm{Sin}^{-1}x+C,$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \mathrm{Tan}^{-1}x+C,$$

$$\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C$$

のいずれかを用いてもよい.

解答例　分母の 2 次関数 x^2+2x+2 が

$$\begin{aligned} x^2+2x+2 &= (x^2+2x+1)-1+2 \\ &= (x+1)^2+1 \end{aligned}$$

と平方完成できるので, $X=x+1$ とおくと

$$\begin{aligned} x^2+2x+2 &= (x^2+2x+1)-1+2 \\ &= (x+1)^2+1 \\ &= 1+X^2 \end{aligned}$$

となり, $dX=dx$ を用いて

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx = \int \frac{1}{1+X^2}\,dX$$

ゆえに 1 番目の公式を用いれば

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx &= \int \frac{1}{\sqrt{1+X^2}}\,dX \\ &= \log(X+\sqrt{1+X^2})+C \\ &= \log(x+1+\sqrt{1+(x+1)^2})+C \\ &= \log(x+1+\sqrt{x^2+2x+2})+C \end{aligned}$$

を得る.

$\boxed{9}$ ロピタルの定理を用いて次の極限値を計算せよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$

$$\frac{(x-\sin x)'}{(x^3)'} = \frac{1-\cos x}{3x^2},$$

$$\frac{(1-\cos x)'}{(3x^2)'} = \frac{\sin x}{6x} \to \frac{1}{6} \quad (x\to 0).$$

よって, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{6}$.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x}$

$$\frac{(a^x-b^x)'}{x'} = a^x\log a - b^x\log b$$

$$\to \log a - \log b = \log\frac{a}{b} \quad (x\to 0).$$

よって, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x}=\log\frac{a}{b}$.

$\boxed{10}$ 次の関数の $x=0$ における $2n+1$ 次近似を求めよ.

$$f(x)=\sin x$$

$$f'(x)=\cos x, \quad f''(x)=-\sin x,$$
$$f^{(3)}(x)=-\cos x, \quad f^{(4)}=\sin x$$

より

$$f'(0)=\cos 0=1, \quad f''(0)=-\sin 0=0,$$

$$f^{(3)}(0)=-\cos 0=-1, \quad f^{(4)}(0)=\sin 0=0.$$

ゆえに

$$f^{(2n+1)}(0)=(-1)^n$$

となり, $f(x)=\sin x$ の $x=0$ における $2n+1$ 次近似は

$$f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\cdots+\frac{1}{(2n+1)!}f^{(2n+1)}(0)x^{2n+1}$$

$$=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}.$$