令和7年度 微積分及び演習I 小テスト No.3 対策プリント

数理・知能・電子・機械・応化・環境　課程 ＿＿ 回生　　学生番号 ＿＿＿＿＿＿　名前 ＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ X, Y を集合とし, $f : X \to Y$ とする. $B_\alpha \subset Y$ (ただし, $\alpha \in I$ は添え字) ならば

$$f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha\in I} B_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha\in I} f^{-1}(B_\alpha)$$

を集合の等号の定義に戻って証明せよ.

解答例　($\subset$) を示す. $x \in f^{-1}(\bigcup_{\alpha\in I} B_\alpha)$ とする. 逆像の定義より, ($x \in X$ かつ) $f(x) \in \bigcup_{\alpha\in I} B_\alpha$ である. さらに, 和集合の定義より $^{\exists}\alpha_x \in I$ s.t.

$$f(x) \in B_{\alpha_x}$$

つまり, 逆像の定義より $x \in f^{-1}(B_{\alpha_x})$. ゆえに和集合の定義より

$$x \in \bigcup_{\alpha\in I} f^{-1}(B_\alpha)$$

を得る. よって ($\subset$) が成立.

($\supset$) を示す.　$x \in \bigcup_{\alpha\in I} f^{-1}(B_\alpha)$ とする.　和集合の定義より, $^{\exists}\alpha_x \in I$ s.t.

$$x \in f^{-1}(B_{\alpha_x})$$

つまり, 逆像の定義より

$$f(x) \in B_{\alpha_x}$$

再び和集合の定義より $f(x) \in \bigcup_{\alpha\in I} B_\alpha$ である. ゆえに逆像の定義より

$$x \in f^{-1}(\bigcup_{\alpha\in I} B_\alpha)$$

を得る. よって ($\supset$) が成立.

以上により, 等号が成立. □

$\boxed{2}$ $a \in [0,1]$ とする. $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ が点 $x = a$ で連続ならば $f + g$ も点 $x = a$ で連続であることを ε-δ 論法で証明せよ.

解答例　$^{\forall}\varepsilon > 0,\ ^{\exists}\delta_\varepsilon > 0$ s.t. $^{\forall}x \in [0,1] : 0 < |x - a| < \delta_\varepsilon$

$$|(f(x) + g(x)) - (f(a) + g(a))| < \varepsilon$$

を示せばよい. $\varepsilon > 0$ とする. f, g は点 $x = a$ で連続なので, ε-δ 論法より $^{\exists}\delta_f, \delta_g > 0$ s.t.

$$^{\forall}x \in [0,1] : 0 < |x - a| < \delta_f, \quad |f(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$^{\forall}x \in [0,1] : 0 < |x - a| < \delta_g, \quad |g(x) - g(a)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

よって, $\delta_\varepsilon := \min\{\delta_f, \delta_g\}$ とおくと, $^{\forall}x \in [0,1] : 0 < |x - a| < \delta_\varepsilon$,

$$\begin{aligned} &|(f(x) + g(x)) - (f(a) + g(a))| \\ &= |f(x) - f(a) + g(x) - g(a)| \\ &\le |f(x) - f(a)| + |g(x) - g(a)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

よって成立. □

$\boxed{3}$ $f(x) = x^2$ とする．このとき，$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は $\mathbb{R}$ 上で連続であることを ε-δ 論法で証明せよ．

解答例　$a \in \mathbb{R}$ とする．$f(x)$ が点 $x = a$ で連続であることを示す．すなわち $^\forall\varepsilon > 0, {}^\exists\delta_\varepsilon > 0$ s.t. $^\forall x : 0 < |x - a| < \delta_\varepsilon$

$$|x^2 - a^2| < \varepsilon$$

を示せばよい．$\varepsilon > 0$ とする．

$$\begin{aligned}|x^2 - a^2| &= |(x + a)(x - a)| \\ &\leq (|x| + |a|)|x - a|\end{aligned}$$

より

$$\delta_\varepsilon := \min\{1, \frac{\varepsilon}{1 + 2|a|}\}$$

とおくと，$\delta_\varepsilon > 0$ でさらに，$^\forall x \in \mathbb{R} : 0 < |x - a| < \delta_\varepsilon$ に対して $|x| \leq |x - a| + |a| \leq \delta_\varepsilon + |a| \leq 1 + |a|$ より

$$\begin{aligned}|x^2 - a^2| &= |(x + a)(x - a)| \\ &\leq (|x| + |a|)|x - a| \\ &\leq (1 + |a| + |a|)\delta_\varepsilon \\ &\leq (1 + 2|a|)\frac{\varepsilon}{1 + 2|a|} \\ &= \varepsilon.\end{aligned}$$

よって成立．　$\square$

$\boxed{4}$ 次の関数の $x = 0$ における連続性と微分可能性を調べよ．連続性の証明には ε-N 論法や ε-δ 論法を用いる必要は無い．

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x} & (x \neq 0), \\ 0 & (x = 0). \end{cases}$$

解答例　まず連続性を調べる．

$$|f(x) - f(0)| = \left|x^2 \sin\frac{1}{x}\right| \leq |x^2|$$

よって，$x \to 0$ のとき $|f(x) - f(0)| \to 0$．よって，f は $x = 0$ で連続．

次に微分可能性を調べる．

$$\frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \frac{h^2 \sin\frac{1}{h}}{h} = h \sin\frac{1}{h}.$$

ここで，$h \to 0$ のとき，$|h \sin\frac{1}{h} - 0| \leq |h| \to 0$ より

$$\begin{aligned}f'(0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} \\ &= 0.\end{aligned}$$

よって f は $x = 0$ で微分可能．