微積分及び演習I・自習シート

問 [高校までの復習] 次の関数を微分せよ.

(1) $f(x) = 2x$

(2) $f(x) = 2$

(3) $f(x) = x^2$

(4) $f(x) = \sqrt{x}$

(5) $f(x) = \sin x$

(6) $f(x) = \sin 2x$

(7) $f(x) = \sin x^2$

(8) $f(x) = \sqrt{1+x^2}$

(9) $f(x) = \sqrt{1+\sin x}$

(10) $f(x) = 2^x$

(11) $f(x) = e^x$

(12) $f(x) = e^{2x}$

(13) $f(x) = e^{x^2}$

(14) $f(x) = 1/(1+x^2)$

(15) $f(x) = e^x \sin x$

(16) $f(x) = \tan x$

(17) $f(x) = \log x$ $(x > 0)$

(18) $f(x) = \log(\tan x)$ $(0 < x < \pi/2)$

(19) $f(x) = \log(x + \sqrt{1+x^2})$ $(x > 0)$

(20) $f(x) = x^x$ $(x > 0)$

発展 教科書 p.64 の定理 2.2 を参考に, 次の定理を証明せよ:

$a, b \in \mathbb{R} : a < b$ とし, $f \in C([a,b])$ とする.

(1) 像 $f([a,b])$ は $\mathbb{R}$ の有界な集合である.

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと. 提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.

証明　像 $f([a,b])$ が $\mathbb{R}$ の有界な集合であることを背理法で示す. $f([a,b])$ が有界ではないと仮定すると, 有界であることの否定

$$\neg \boxed{\exists M > 0 \boxed{\forall y \in f([a,b]), \boxed{|y| \leq M}}}$$

より

$$\boxed{\forall M > 0 \boxed{\exists y \in f([a,b]), \boxed{|y| > M}}}$$

なので, 特に $M > 0$ として自然数 $n \in \mathbb{N}$ を選んでも, やはり $^\exists y_n \in f([a,b])$ s.t.

$$|y_n| > n$$

が成立する. 像の定義より...

(2) f は最大値をもつ. つまり, $^\exists c \in [a,b]$ s.t.

$$^\forall x \in [a,b], \quad f(x) \leq f(c).$$

証明　(1) より $A := f([a,b])$ は有界であるので, $\sup A$ が存在する. そこで $a_0 := \sup A$ とおく. 最小上界の定義より, $^\forall n \in \mathbb{N}$, $^\exists a_n \in A$ s.t.

$$a_0 - \frac{1}{n} < a_n, \quad \text{つまり} \quad -\frac{1}{n} < a_n - a_0.$$

一方, 最小上界は上界の 1 つなので

$$^\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n \leq a_0, \quad \text{つまり} \quad a_n - a_0 \leq 0 < \frac{1}{n}.$$

が成立する. これらを合わせれば...