2025/05/15/No.7

微積分及び演習 I・自習シート

問 1 数列 $\{a_n\}$ が収束するならば, 収束先は必ず 1 つに定まることを ε-N 論法で証明していく. 次の問いに答えよ.

(1) $\{a_n\}$ の収束先を $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ とおく.

$$^\forall \varepsilon > 0, \quad |\alpha - \beta| < \varepsilon$$

であることを証明せよ.

解答例　収束先を $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ とおくと, 仮定より $^\forall \varepsilon > 0$, $^\exists N_\alpha, N_\beta \in \mathbb{N}$ s.t.

$$^\forall n \geq N_\alpha, \quad |a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2},$$
$$^\forall n \geq N_\beta, \quad |a_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

そこで,...

(2) 収束先は必ず 1 つに定まることを証明せよ.

問 2 $\{a_n\}$ を有界な実数列とし, $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$S_n := \{a_k \in \mathbb{R} : k \geq n\}$$

とおく, すなわち

$$S_1 = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}, \quad S_2 = \{a_2, a_3, a_4, \ldots\}, \quad S_3 = \{a_3, a_4, a_5, \ldots\}.$$

次に, 各 S_n の最小上界, 最大下界を使って数列 $\{\overline{a}_n\}$, $\{\underline{a}_n\}$ を次のように定義する:

$$\overline{a}_n := \sup S_n, \quad \underline{a}_n := \inf S_n.$$

このとき, $\{\overline{a}_n\}$ は単調減少列, $\{\underline{a}_n\}$ は単調増加列であることをそれぞれ証明せよ.

問 3 数列 $\{a_n\}$ の一般項を

$$a_n := 2n$$

とおく. $\{a_n\}$ の部分列 $\{a_{n_k}\}$ として

$$^\forall k \in \mathbb{N}, \quad n_k := 3k$$

を満たすように n_k を定める. a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_9} の値をそれぞれ求めよ.

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと. 提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.