微積分及び演習 I・自習シート

問 1 $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}$ をそれぞれ空でない下に有界な集合とする．また

$$E := \{z \in \mathbb{R} : {}^\exists x \in E_1, {}^\exists y \in E_2 \text{ s.t. } z = x + y\}$$

とおく．このとき，

$$\inf E \leq \inf E_1 + \inf E_2$$

を証明せよ．

問 2 $E \subset \mathbb{R}$ を空でない部分集合とする．$\alpha \in \mathbb{R}$ が

$$\alpha \in E \quad \text{かつ} \quad \alpha \leq x \quad ({}^\forall x \in E)$$

を満たすとき α を E の最小値とよび $\min E$ とかく．E の最小値が存在するならば

$$\min E = \inf E$$

であることを証明せよ．

問 3 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ をそれぞれ

$$a_n : 0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots$$
$$b_n : 0, -1, 0, -1, 0, -1, \ldots$$

とおく．次の問いに答えよ．

(1) 数列 $\{a_n\}$ を集合 $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ とみると，

$$\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = \{0, 1\}$$

である [1)]．数列 $\{b_n\}$ を集合 $\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ と見たとき，$\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ を元を列挙する形で求めよ．

(2) 数列の sup を

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} a_n := \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

で定義する．つまり，数列を集合とみた最小上界と定義する．このとき，

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} (a_n + b_n) < \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n + \sup_{n \in \mathbb{N}} b_n$$

であることを示せ．

提出する場合は，解答例を参考にして自分で採点をしておくこと．提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です．

1) 数列には順番があり，例えば，一般項が $a_n := n$ で定義される数列

$$a_n : 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

において第 2 項と第 3 項を入れ換えた

$$b_n : 1, 3, 2, 4, 5, \ldots$$

とは別の数列と見なす．しかし集合と見なす場合には，順番は関係なく $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}, \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ どちらも

$$\{1, 2, 3, 4, 5, \cdots\}$$

である．

問 4 次を証明せよ.

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right] = [0, 1)$$