

微積分及び演習I・自習シート

問1 X を全体集合とし, $A, B \subset X$, $A, B \neq \emptyset$ とする. 次の3条件は同値¹⁾であることを示せ.

$$(1) A^c \cup B = X$$

$$(2) A \subset B$$

$$(3) A \cap B^c = \emptyset$$

問2 $E_1 \subset \mathbb{R}, E_2 \subset \mathbb{R}$ とし, それぞれ E_1 と E_2 は空ではない有界な集合とする. 例題を参考に (1)–(3) を証明せよ.

(例題) $E := \{x + y : x \in E_1, y \in E_2\}$ とおく²⁾. このとき

$$\inf E \geq \inf E_1 + \inf E_2$$

解答例 $\alpha := \inf E_1, \beta := \inf E_2$ とおく. 最大下界 (下限) の定義より,

$$\forall x \in E_1, x \geq \alpha \quad \text{かつ} \quad \forall y \in E_2, y \geq \beta.$$

ここで, E の定義より $\forall x \in E, \exists x_z \in E_1, \exists y_z \in E_2$ s.t.

$$z = x_z + y_z$$

なので³⁾

$$z = x_z + y_z \geq \alpha + \beta.$$

つまり, $\alpha + \beta$ は E の下界の1つである. 一方, $\inf E$ は E の最大下界なので

$$\inf E \geq \alpha + \beta = \inf E_1 + \inf E_2.$$

□

(1) さらに $E_1 \subset E_2$ とする. このとき

$$\inf E_1 \geq \inf E_2$$

(2) $E := \{x + y : x \in E_1, y \in E_2\}$ とおく. このとき

$$\sup E \leq \sup E_1 + \sup E_2$$

(3) $-E_1 := \{-x : x \in E_1\}$ ⁴⁾ とおく. このとき

$$\sup(-E_1) = -\inf E_1.$$

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点しておくこと. 提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.

¹⁾ 「(1) ならば (2)」, 「(2) ならば (3)」, 「(3) ならば (1)」を 3 つを示せばよい.

²⁾ いいかえると $E = \{z : \exists x \in E_1, \exists y \in E_2 \text{ s.t. } z = x + y\}$

³⁾ E の元 z は必ず E_1 の元と E_2 の元の和で書けるというのが E の定義.

⁴⁾ いいかえると $-E_1 := \{z : \exists x \in E_1 \text{ s.t. } z = -x\}$

問 3 $A, B \subset \mathbb{R}$ を空でない有界集合とする. このとき次を証明せよ.

(1) $\inf A \leq \sup A$.

(2) $\forall a \in A, \forall b \in B, a \leq b$ が成立するならば $\sup A \leq \inf B$.

(3) $\forall a \in A, \exists b_a \in B$ s.t. $a \leq b_a$ が成立するならば $\sup A \leq \sup B$.