

微積分及び演習I・自習シート

問1 次の関数 f の1階導関数 f' , 2階導関数 f'' と n 階導関数 $f^{(n)}$ を求めよ.

(1) $f(x) = e^{-x}$

(2) $f(x) = \sqrt{1+x}$

(3) $f(x) = \frac{1}{1-x}$

(4) $f(x) = \log(1+x)$

問2 [広義積分] $y = \frac{1}{x^2}$ を考える. 次の問いに答えよ.

(1) $M > 1$ とすると

$$\int_1^M \frac{1}{x^2} dx$$

を求めよ.

(2)

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx := \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_1^M \frac{1}{x^2} dx$$

と定義する (広義積分).

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

を求めよ.

(3) 積分区間が $[a, +\infty)$ の場合, $[a, M]$ の積分値が $M \rightarrow +\infty$ に対して収束する場合, その極限值で定義することにする. 次の値を求めよ.

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx, \quad \int_0^{+\infty} e^{-3x} dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx.$$

問3

$$I_n := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx$$

とおく (ただし $n \in \mathbb{N}$)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \sin x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x (-\cos x)' \, dx$$

から部分積分の公式を用いて $n \geq 2$ に対する次の公式を証明せよ.¹⁾

$$I_n := \begin{cases} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} & (n \text{ が偶数のとき}) \\ \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} & (n \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと. 提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.

¹⁾ 部分積分で $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ なる漸化式をまずは求める.